

ARCHIMÈDE

ŒUVRES

DES CORPS FLOTTANTS

STOMACHION

LA MÉTHODE

LE LIVRE DES LEMMES

LE PROBLÈME DES DEUX



LES BELLES LETTRES

PARIS

ARCHIMÈDE

TOME III

**DES CORPS FLOTTANTS
STOMACHION
LA MÉTHODE
LE LIVRE DES LEMMES
LE PROBLÈME DES BŒUFS**

TEXTE ÉTABLI ET TRADUIT

PAR

CHARLES MUGLER

Professeur honoraire à l'Université de Nice



PARIS

SOCIÉTÉ D'ÉDITION « LES BELLES LETTRES »
95, BOULEVARD RASPAIL

—
1971

Conformément aux statuts de l'Association Guillaume Budé, ce volume a été soumis à l'approbation de la commission technique, qui a chargé M. Ed. Delebecque d'en faire la révision et d'en surveiller la correction en collaboration avec M. Ch. Mugler.

La loi du 11 mars n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration « toute représentation ou reproduction intégrale, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droits ou ayants-cause, est illicite » (Alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

AVANT-PROPOS

Au moment de terminer ce tome III des œuvres conservées d'Archimède, il me tient à cœur d'exprimer à mes collègues E. Delebecque et J. Irigoin ma profonde reconnaissance de l'infatigable sollicitude qu'ils ont continué à témoigner à mon travail.

Ch. MUGLER.

SIGLA

- A codex Vallae deperditus a quo fluxerunt DEGH.
B Ottobonianus lat. 1850, autographus G. de Moerbeke, a. 1269.
C Codex rescriptus Metochii Constantinopolitani S. Sepulchri monasterii Hierosolymitani 355, saec. X.
D Laurentianus XXVIII 4, saec. XV.
E Marcianus gr. 305, saec. XV.
G Parisinus gr. 2360, saec. XVI.
H Parisinus gr. 2361, a. 1544.
P Parisinus gr. 2448, saec. XIV.
G Guelferbytanus Gudianus gr. 77.

- Basil. Editio princeps, Basileae, 1544.
Riualtus Archimedis opera, Parisiis, 1615.
Barrowius Opera Archimedis, Londini, 1675.
Wallis Archimedis arenarius et dimensio circuli, Oxonii, 1678.
Torellius Archimedis opera, Oxonii, 1792.
Nizzius Nizze, Archimedes' vorhandene Werke, übersetzt und erklärt, Stralsund, 1824.
Heiberg Archimedis opera omnia, editio altera, Lipsiae, 1910-1915.

DES CORPS FLOTTANTS

NOTICE

Ce traité a pour objet l'étude des lois de la statique des fluides et des conditions d'équilibre des corps solides immergés dans un fluide ou flottant sur lui. De tous les travaux d'Archimède il est celui qui se rapporte le plus à la discipline appelée aujourd'hui physique théorique. Comme dans ses recherches sur l'équilibre des corps solides et dans ses évaluations d'aires et de volumes, les principes et les propositions qu'il démontre théoriquement dans ce traité ont été vérifiés par lui expérimentalement. D'après une légende rapportée par Vitruve (*De l'architecture* IX, 3) Archimède aurait même eu l'intuition du principe fondamental de l'hydrostatique, qu'il analyse dans ce traité, à l'occasion d'un bain. Ce principe fait l'objet des propositions 3-7 du premier livre. Les propositions 8 et 9 du premier livre étudient la position d'équilibre d'un corps flottant ayant la forme d'un segment sphérique. Dans les dix propositions du livre II du traité *Des corps flottants* Archimède étudie les conditions d'équilibre d'un solide flottant affectant la forme d'un segment de parabololoïde de révolution.

Dans le livre I, Archimède suppose que les lignes droites, suivant lesquelles les corps pesants, et les portions de liquide en particulier, exercent leur pression, convergent au centre de la terre, alors qu'au livre II il suppose ces lignes parallèles. Les propositions du deuxième livre ne sont donc valables que pour des corps de dimensions restreintes, à l'échelle humaine, pour lesquelles les verticales peuvent être considérées

comme parallèles, alors que les conclusions du livre I s'appliqueraient aussi à des corps ayant des dimensions de l'ordre de la terre.

La proposition 2 du premier livre, où Archimède déduit de l'hypothèse de la convergence des verticales la forme sphérique de la surface d'un liquide en état d'équilibre, est la première, et pendant des siècles la seule, tentative de rendre compte par le raisonnement mathématique du fait d'observation, familier aux riverains de la Méditerranée, de la courbure de la mer. L'explication du phénomène proposée un siècle avant celle d'Archimède par Aristote, dans son traité *Du ciel*, 287 b 4-14, manque de rigueur mathématique. Aujourd'hui, cette proposition est considérée comme une des bases de la physique et des sciences de la nature. Ch. Lyell, le fondateur de la géologie moderne, l'applique à l'explication de la forme des couches sédimentaires. Mais au moment de sa publication elle se heurta à certaines critiques, entre autres de la part d'Ératosthène, d'après un passage de la *Géographie* de Strabon¹.

Le texte grec est établi d'après le palimpseste de Jérusalem, C, seul manuscrit grec contenant le traité *Des corps flottants*. Les lacunes du ms. C ont été comblées par le texte de la version latine de Guillaume de Moerbeke, ms. *ℒ*, qui a été notre unique témoignage avant la découverte de C (cf. l'*Introduction*).

1. Cf. *Géogr.* I, 3, 11 ; c. 54.

DES CORPS FLOTTANTS I

Nous admettons comme principe que le liquide a une nature telle que, ses parties étant disposées d'une manière égale et contiguës, celle qui est moins comprimée est poussée de sa place par celle qui est comprimée davantage, et que chacune de ses parties est comprimée par le liquide placé verticalement au-dessus d'elle, à moins que le liquide ne soit enfermé dans quelque (sc. récipient) et comprimé par quelque chose d'autre.

1.

Si une surface est coupée par un plan passant toujours par le même point et que l'intersection est une circonférence de cercle ayant pour centre le point par lequel passe le plan sécant, la surface sera celle d'une sphère.

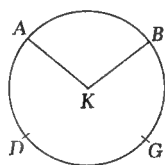


Fig. 85

Soit en effet une surface coupée par un plan passant par le point K, de manière que son intersection (sc. avec la surface) soit toujours une circonférence de

ΟΧΟΥΜΕΝΩΝ Α΄

Ἀρχιμήδους Ὀχουμένων α΄

Ὑποκείσθω τὸ ὑγρὸν φύσιν ἔχον τοιαύταν, ὥστε τῶν μερέων αὐτοῦ τῶν ἐξ ἴσου κειμένων καὶ συνεχέων ἐόντων ἐξωθεῖσθαι τὸ ἦσσον θλιβόμενον ὑπὸ τοῦ μᾶλλον θλιβο-
 5 μένου, καὶ ἕκαστον δὲ τῶν μερέων αὐτοῦ θλίβεσθαι τῷ ὑπεράνω αὐτοῦ ὑγρῷ κατὰ κάθετον ἐόντι, εἴ κα μὴ τὸ ὑγρὸν ἦ καθειργμένον ἐν τινι καὶ ὑπ' ἄλλου τινὸς θλι-
 βόμενον.

α΄.

10 Εἴ κα ἡ ἐπιφάνειά τις ἐπιπέδῳ τεμνομένη διὰ τινος αἰὲ τοῦ σαιμείου τὰν τομὰν ποιεόντι
circuli periferiam centrum habentem signum, per quod plano secatur, sperae erit superficies.

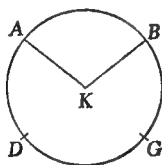


Fig. 85

Sit enim superficies aliqua secta per signum K
 15 plano semper sectionem faciente circuli periferiam,

1 Ἀρχ. Ὀχ. α΄ C : liber Archimedis de insidentibus aque
 || 6 ἐόντι C, Arabs : διότι C || μὴ C, Arabs : om. C || 7 καθειργμένον
 Arabs : καθιέμενον C || 10 Εἴ κα ἡ Heiberg : καὶ C si C.

cercle de centre K. Si donc cette surface n'est pas une sphère, les segments de droite reliant le centre à la surface ne seront pas tous égaux. Soit ainsi A, B, G, D des points de la surface ; que les segments AK et KB soient inégaux ; faisons passer par KA et KB un plan qui ait comme intersection avec la surface la ligne DABG ; cette ligne appartient donc à un cercle de centre K, du moment qu'on a fait cette hypothèse sur la surface. KA et KB ne sont donc pas inégaux, par conséquent, la surface est nécessairement celle d'une sphère.

2.

La surface de tout liquide en état de repos aura la forme d'une sphère ayant le même centre que la terre.

Imaginons en effet un liquide en état de repos ; coupons sa surface par un plan passant par le centre de la terre. Soit K le centre de la terre, et $AB\Gamma\Delta$ la section de la surface. Je dis que $AB\Gamma\Delta$ est une circonférence de cercle de centre K.

En effet, s'il n'en est pas ainsi, les segments de droite menés du point K à la ligne $AB\Gamma\Delta$ ne seront pas égaux. Donnons-nous alors un certain segment de droite supérieur à certains des segments menés de K à la ligne $AB\Gamma\Delta$ et inférieur à certains autres, et décrivons un cercle autour de K comme centre et avec un rayon égal au segment de droite choisi. La circonférence de ce cercle tombera donc en partie à l'extérieur, en partie à l'intérieur de la ligne $AB\Gamma\Delta$ du moment que son rayon est supérieur à certains des segments menés de K à la ligne $AB\Gamma\Delta$ et inférieur à certains autres. Soit donc ZBH la circonférence du cercle

centrum autem ipsius K. Si igitur ipsa superficies non est sperae superficies, non erunt omnes quae a centro ad superficiem occurrentes lineae aequales. Sint itaque quae A, B, G, D signa in superficie, et
5 inaequales quae AK, KB, per ipsas autem KA, KB planum educatur et faciat sectionem in superficie lineam DABG ; circuli ergo est ipsa, centrum autem ipsius K, quoniam supponebatur superficies talis. Non sunt ergo inaequales lineae KA, KB ; neces-
10 sarium igitur est superficiem esse sperae superficiem.

 β' .

Omnis humidi consistentis ita, ut maneat inmotum, superficies habebit figuram sperae habentis centrum idem cum terra.

15 Intelligatur enim humidum consistens ita, ut maneat non motum, et secetur ipsius superficies plano per centrum terrae, sit autem terrae centrum K, superficiei autem sectio linea ABGD. Dico itaque lineam ABGD circuli esse periferiam, centrum
20 autem ipsius K.

Si enim non est, rectae a K ad lineam ABGD occurrentes non erunt aequales. Sumatur itaque aliqua recta, quae est quarundam quidem a K occurrentium ad lineam ABGD maior, quarundam
25 autem minor, et centro quidem K, distantia autem sumptae lineae circulus describatur ; cadet igitur periferia circuli habens hoc quidem extra lineam ABGD, hoc autem intra, quoniam quae ex centro quarundam quidem a K occurrentium ad lineam
30 ABGD est maior, quarundam autem minor, sit igitur descripti circuli periferia quae ZBH, et a B

décrit ; joignons B et K et menons les droites ZK et KEA faisant des angles égaux avec BK ; décrivons autour de K comme centre une circonférence XOII dans le plan et dans le liquide. Les parties du liquide situées suivant la circonférence XOII sont ainsi disposées d'une manière égale et contiguës entre elles ; celles qui sont situées suivant l'arc XO sont comprimées

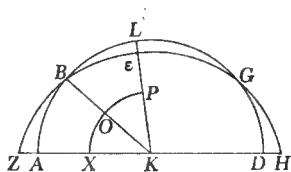


Fig. 86

par le liquide de la région ZB, et celles qui sont situées suivant l'arc OII sont comprimées par le liquide de la région BE ; la compression subie par les parties du liquide situées suivant l'arc XO est donc différente de la compression subie par les parties situées suivant l'arc OII¹, de façon que les parties du liquide qui sont moins comprimées sont poussées de leur place par celles qui sont comprimées davantage². Il s'ensuit que le liquide ne restera pas en repos. Mais on l'avait supposé dans un état tel qu'il resterait en repos. Nécessairement donc la ligne³ ABΓΔ est une circonférence de cercle de centre K. On démontrera de la même façon que, quelle que soit la manière dont la surface du liquide est coupée, par un autre plan passant par le centre de la terre, la section sera une circonférence de cercle, et que son centre est le centre de la terre. Il est donc évident que la surface du liquide, en état de repos, a la forme d'une sphère ayant le même centre

1. OP sur la figure, empruntée au manuscrit latin.

2. Cf. les principes énoncés en tête de la prop. 1.

3. ABGD sur la figure.

ad K recta ducatur, et copulentur quae ZK, KEL
 aequales facientes angulos, describatur autem et
 centro K periferia quaedam quae XOP in plano et
 in humido ; partes itaque humidi quae secundum XOP
 5 periferiam ex aequo sunt positae et continuae
 invicem. Et premuntur quae quidem secundum XO
 periferiam humido quod secundum ZB locum ;
 Inaequaliter igitur premuntur partes humidi quae
 secundum periferiam XO et quae

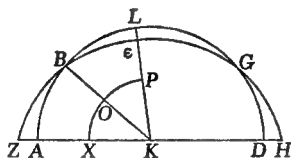


Fig. 86

- 10 [ἡ] κατὰ τὰν ΟΠ · ὥστε ἐξωθήσονται τὰ ἡσσον θλιζόμενα
 ὑπὸ τῶν μᾶλλον θλιζομένων · οὐ μένει ἄρα τὸ ὑγρόν.
 Ὑπέκειτο δὲ καθεστακὸς εἶμεν ὥστε μένειν ἀκίνητον ·
 ἀναγκαῖον ἄρα τὰν ΑΒΓΔ γραμμὰν κύκλου περιφέρειαν
 εἶμεν καὶ κέντρον αὐτᾶς τὸ Κ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται
 15 καί, ὅπως κα ἄλλως ἃ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ ἐπιπέδῳ
 τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς, ὅτι ἃ τομὰ ἐσσεῖται
 κύκλου περιφέρεια, καὶ κέντρον αὐτᾶς ἐσσεῖται ὃ καὶ τᾶς
 γᾶς ἐστι κέντρον. Δῆλον οὖν ὅτι ἃ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ
 καθεστακὸς ἀκινήτου σφαίρας ἔχει τὸ σχῆμα τὸ αὐτὸ
 20 κέντρον ἐχούσας τᾷ γᾶ, ἐπειδὴ τοιαῦτα ἐστίν, ὥστε

1 ZK Heiberg : hk^z ms. 2 || 6 et add. Heiberg || 11 οὐ μένει
 ἄρα C : non ergo constare fecimus aliquod 2 || 12 εἶμεν C : om.
 2 || 15 ὅπως κα ἄλλως Heiberg : ὅπως καὶ ἄλλως C quo...
 (lac.)... modocumque aliter 2 || 18 ὅτι Heiberg : quod 2 om. C
 || 20 τᾷ γᾶ 2 : τᾶς γᾶς C.

que la terre, puisque cette surface est telle que, coupée par un plan passant par un même point, elle donne lieu à une section affectant la figure d'un cercle ayant pour centre le point par lequel passe le plan sécant¹.

3.

Les grandeurs solides qui (sc. sous un même volume) ont le même poids qu'un liquide s'immergeront, quand elles sont abandonnées dans ce liquide, de manière à ne pas dépasser la surface du liquide et ne descendront pas plus loin vers le fond du liquide².

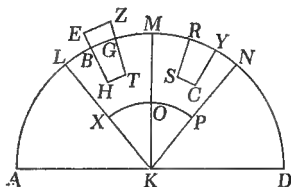


Fig. 87

En effet, qu'une grandeur solide ayant (sc. sous un même volume) le même poids qu'un liquide, soit abandonnée dans ce liquide, et qu'une de ses parties dépasse, si possible, la surface du liquide ; que le liquide reste en état de repos. Imaginons maintenant un plan passant par le centre de la terre et du liquide et par la grandeur solide ; soit l'arc $AB\Gamma\Delta$ son intersection avec la surface du liquide, et la figure $EZH\Theta$ son intersection avec la grandeur solide ; soit K le centre de la terre. Soit $BFH\Theta$ la (sc. section de la) partie du solide plongée dans le liquide, $BEZF$ la (sc. section de la) partie qui en émerge. Imaginons une figure

1. Cf. prop. 1.

2. Proposition citée par Héron, *Pneum.* I.

〈διὰ τοῦ αὐτοῦ σαμείου τμαθεῖς〉αν τὰν τομὰν ποιεῖν περιφέρειαν κύκλου κέντρον ἔχοντος τὸ σαμεῖον, δι' οὗ τέμνεται τῷ ἐπιπέδῳ.

γ'.

- 5 Τῶν στερεῶν μεγεθῶν τὰ ἰσοβαρέοντα τῷ ὑγρῷ ἀφεθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν καταβασοῦνται, ὥστε τὰς ἐπιφανείας τὰς τοῦ ὑγροῦ μὴ ὑπερέχειν μηδέν, καὶ οὐκέτι οἰσθήσονται ἐπὶ τὸ κάτω.

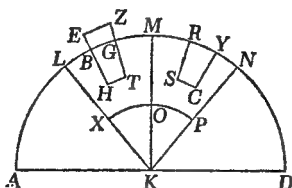


Fig. 87

- Ἀφείσθω γάρ τι στερεὸν μέγεθος εἰς τὸ ὑγρὸν τῶν
 10 ἰσοβαρέων τῷ ὑγρῷ καί, εἰ δυνατόν, ὑπερεχέτω τι αὐτοῦ τὰς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καθεστάτω δὲ τὸ ὑγρὸν, ὥστε μένειν ἀκίνητον. Νοείσθω δὴ τι ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διὰ τε τοῦ κέντρου τὰς γᾶς καὶ τοῦ ὑγροῦ καὶ διὰ τοῦ στερεοῦ μεγέθους, τομὰ δὲ ἔστω τὰς μὲν ἐπιφανείας
 15 τοῦ ὑγροῦ ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια, τοῦ δὲ στερεοῦ μεγέθους τὸ ΕΖΗΘ σχῆμα, κέντρον δὲ τὰς γᾶς τὸ Κ. Ἔστω δὴ τοῦ μὲν στερεοῦ τὸ μὲν ΒΓΗΘ ἐν τῷ ὑγρῷ, τὸ δὲ ΒΕΖΓ ἐκτός.

1 διὰ τοῦ αὐτοῦ σαμείου τμαθεῖσαν Heiberg : secta per idem signum \propto lac. C || 5 ἰσοβαρέοντα rest. Heiberg : aequalis molis et aequalis ponderis \propto || 11 καταβασοῦνται Heiberg : καταβαροῦνται C demergentur \propto || 9 στερεὸν C : om. \propto || 10 τι αὐτοῦ C : ipsa \propto || 14 δὲ \propto : om. C || 15 περιφέρεια C : om. \propto || 16 σχῆμα Heiberg : σχῆμα C insidentia \propto .

solide ayant la forme d'une pyramide ayant pour base un parallélogramme situé dans la surface du liquide et pour sommet le centre de la terre ; que l'intersection entre le plan contenant l'arc $AB\Gamma\Delta$, et les plans de la pyramide soit la droite KA et la droite KM . Décrivons autour de K comme centre une autre surface sphérique dans le liquide qui s'étend au-dessous du solide $EZH\Theta$, et qu'elle soit coupée par le plan (sc. de l'arc $AB\Gamma\Delta$). Donnons-nous une autre pyramide, égale et semblable à celle qui contient le solide et contiguë à celle-ci ; soit KM et KN les traces de ses plans. Imaginons dans le liquide une certaine grandeur $P\Xi\Upsilon\Upsilon'$, découpée dans le liquide, égale et semblable à la partie $BH\Theta\Gamma$ du solide qui est plongée dans le liquide. Dès lors, les parties du liquide dans la première pyramide, qui se trouvent sous la surface contenant l'arc ΞO , et celles de la seconde pyramide, qui se trouvent sous la surface contenant l'arc ΠO , sont disposées d'une manière égale et contiguës les unes aux autres. Mais elles ne sont pas comprimées de la même manière. Le liquide disposé suivant l'arc ΞO est en effet comprimé par le solide ΘHEZ et par le liquide situé entre les surfaces suivant les arcs ΞO et ΛM et les faces de la pyramide, alors que le liquide disposé suivant l'arc ΠO est comprimé par le liquide se trouvant entre les surfaces qui contiennent les arcs ΠO et MN et les faces de la pyramide. Mais le poids (sc. la pression) du liquide compris entre les arcs MN et OH sera moindre. Le liquide du côté de $P\Xi\Upsilon\Upsilon'$ est en effet moins lourd que le solide $EZH\Theta$ du moment qu'il est équivalent à la partie du solide $HB\Gamma\Theta$, puisque

- Νοεῖσθω δὴ τὸ στερεὸν σχῆμα περιλαμβανόμενον πυραμοειδεῖ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὕγρου, κορυφὰν δὲ τὸ κέντρον τῆς γᾶς, <τομὰ δὲ ἔστω τοῦ τε ἐπιπ>έδου, ἐν ᾧ ἐστὶν ἡ ΑΒΓΔ
- 5 περιφέρεια, καὶ τῶν τῆς πυραμίδος ἐπιπέδων αἱ ΚΛ, ΚΜ. Γεγράφθω τις ἄλλας σφαίρας ἐπιφάνεια περὶ κέντρον τὸ Κ ἐν τῷ ὕγρῳ τῷ ὑπὸ τοῦ ΕΖΗΘ καὶ τεμνέσθω ἐπιπέδῳ, λελάφθω δὲ τις καὶ ἄλλα πυραμῖς ἴσα καὶ ὁμοία τῇ περιλαμβανούσῃ τὸ στερεὸν συνεχῆς αὐτῇ, τομὰ δὲ ἔστω
- 10 τῶν ἐπιπέδων αὐτῆς αἱ ΚΜ, ΚΝ, καὶ ἐν τῷ ὕγρῳ νοεῖσθω τι μέγεθος τοῦ ὕγρου ἀπολαμβανόμενον τὸ ΡΣΤΥ ἴσον καὶ ὁμοιον τῷ στερεῷ τῷ κατὰ τὰ Β, Η, Θ, Γ, ὃ ἐστὶν αὐτοῦ ἐν τῷ ὕγρῳ · τὰ δὴ μέρη τοῦ ὕγρου τὰ τε ἐν τῇ πρώτῃ πυραμίδι τὰ ὑπὸ τὰν ἐπιφανείαν, ἐν ᾗ ἐστὶν ἡ ΕΞΟ περι-
- 15 φέρεια, καὶ τὰ ἐν τῇ ἐτέρᾳ, ἐν ᾗ ἐστὶν ἡ ΠΟ, ἐξ ἴσου τέ ἐντι κείμενα καὶ συνεχέα. Οὐχ ὁμοίως δὲ θλίβονται · τὸ μὲν γὰρ κατὰ τὰν ΕΞΟ θλίβεται τῷ στερεῷ τῷ ΘΗΕΖ καὶ τῷ ὕγρῳ τῷ μεταξὺ τὰν ἐπιφανείαν τὰν κατὰ τὰς ΕΞΟ, ΛΜ καὶ τῶν τῆς πυραμίδος ἐπιπέδων, τὸ δὲ κατὰ τὰν ΠΟ
- 20 τῷ ὕγρῳ τῷ μεταξὺ τὰν ἐπιφανείαν τὰν κατὰ τὰς ΠΟ, ΜΝ καὶ τῶν τῆς πυραμίδος ἐπιπέδων. Ἐλασσον δὲ ἐσσεῖται τὸ βάρος τοῦ ὕγρου τοῦ κατὰ τὰς ΜΝ, ΟΠ · τὸ μὲν γὰρ κατὰ τὸ ΡΣΤΥ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΕΖΗΘ στερεοῦ · αὐτῷ γὰρ τῷ κατὰ τὸ ΗΒΓΘ ἴσον ἐστὶν διὰ τὸ τῷ μεγέθει

1 δὴ C : et Σ || 1-2 πυραμοειδεῖ C : pyramide Σ || 4 τομὰ δὲ ἔστω τοῦ τε ἐπιπέδου, ἐν ᾧ rest. Heiberg : sectio autem sit plani in quo Σ || 5 πυραμίδος Σ : πυραμίδας C || 6 ἐπιφάνεια Σ : ἐπιφανείας C || 7 τῷ alt. C : om. Σ || καὶ τεμνέσθω ἐπιπέδῳ Heiberg : καὶ τεμνέσθω ἐπιπέδου C quae cor secetur hoc a superficie plani Σ || 8 δὲ Σ : om. C || 9 αὐτῇ Σ : αὐτῆς C || 10 ἐν Σ : om. C || 12 τῷ στερεῷ τῷ Σ : τῶν στερεῶν C || 14 ΕΞΟ ms. Σ : ΕΘ ms. C || 14-15 περιφέρεια C : om. Σ || 15 τὰ Σ : τὸ C || ἐστὶν C : om. Σ || 16 τὸ C : quae Σ || 17 τὰν Heiberg : τῶ C || 18 τὰς Heiberg : τὰν C || ΕΞΟ ms. Σ : ΕΘ ms. C || 19 τὸ C : quae Σ || 20 τῷ alt. Σ : τῶν C || 21 ἔλασσον Heiberg : ἐλάσσων C || δὲ Σ : δὴ C || 24 αὐτῷ C : ipsius Σ .

la grandeur est la même, que les densités sont égales par hypothèse, et que le reste est égal au reste. Il est donc évident que la partie du liquide située suivant l'arc $O\Pi$ sera poussée de sa place¹ par la partie située suivant l'arc $O\Xi$, et que le liquide ne sera pas en état de repos. Mais on l'a supposé immobile. Il s'ensuit qu'aucune partie de la grandeur solide n'émergera de la surface du liquide. Immergée, la grandeur solide ne descendra cependant pas vers le fond du liquide ; car toutes les parties du liquide, disposées d'une manière égale, seront comprimées de la même manière, du moment que le solide et le liquide ont (sc. par hypothèse) le même poids (sc. la même densité).

4.

Toute grandeur solide plus légère que le liquide (sc. de même volume), abandonnée dans ce liquide, ne sera pas immergée entièrement, mais une partie sera à l'extérieur de la surface du liquide.

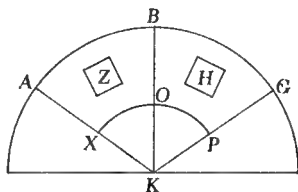


Fig. 88

Soit, en effet, une grandeur solide plus légère que le liquide ; que, abandonnée dans le liquide, elle y soit immergée, si possible, entièrement, et qu'aucune partie d'elle ne soit à l'extérieur de la surface du liquide ; que le liquide soit en état d'immobilité. Imaginons,

1. Cf. les principes précédant la prop. 1.

ἴσον εἶμεν καὶ ἰσοβαρές ὑποκεῖσθαι τὸ στερεὸν <τῷ
 ὑγρῷ · τὸ δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ> ἴσον ἐστί. Δῆλον οὖν ὅτι
 ἐξωθήσεται τὸ μέρος τὸ κατὰ τὰν ΟΠ περιφέρειαν ὑπὸ
 τοῦ κατὰ τὰν ΟΞ περιφέρειαν, καὶ οὐκ ἐσσεῖται τὸ ὑγρὸν
 5 ἀκίνητον. Ὑπόκειται δὲ ἀκίνητον ἓν · οὐκ ἄρα ὑπερέξει
 τῆς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας οὐδὲν τοῦ στερεοῦ μεγέθους.
 Καταδύν δὲ τὸ στερεὸν οὐκ οἰσθήσεται ἐς τὰ κάτω ·
 ὁμοίως γὰρ πάντα θλιβεσούντι τὰ μέρη τοῦ ὑγροῦ τὰ
 ἐξ ἴσου κείμενα διὰ τὸ ἰσοβαρέα εἶμεν τὸ στερεὸν καὶ τὸ
 10 ὑγρὸν.

δ'.

Τῶν στερεῶν μεγεθέων ὃ κα κουφότερον ἦ τοῦ ὑγροῦ,
 ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν οὐ καταδύσεται ὅλον, ἀλλὰ ἐσσεῖται
 τι αὐτοῦ ἐκτὸς τῆς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

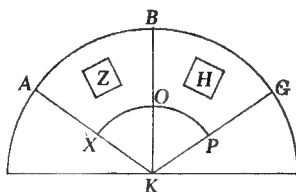


Fig. 88

15 Ἔστω γὰρ στερεὸν μέγεθος κουφότερον τοῦ ὑγροῦ
 καὶ ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν δεδυκέτω ὅλον, εἰ δυνατόν, καὶ
 μηδὲν αὐτοῦ ἔστω ἐκτὸς τῆς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας,
 καθεστακέτω δὲ τὸ ὑγρὸν, ὥστε μένειν ἀκίνητον. Νοεῖσθω

1 εἶμεν C : om. χ || 1-2 τῷ ὑγρῷ · τὸ δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ
 rest. Heiberg : cum humido, reliquum autem reliquo χ || 2
 ἴσον Heiberg : ἄνισον χ C || 3 ΟΠ ms. χ : ΝΟΠ ms. C || 8
 θλιβεσούντι Heiberg : prementur χ ἐσσοῦνται C || 9 ἰσοβαρέα Hei-
 berg : ἰσοβαρῇ C aequae grave χ || 9 τὸ στερεὸν χ : τὸ ὑγρὸν
 C || 9-10 καὶ τὸ ὑγρὸν C : om. χ || 12 δ χ : εἰ C.

dès lors, un plan passant par le centre de la terre et à travers le liquide et la grandeur solide ; que l'intersection entre ce plan et la surface du liquide soit l'arc $AB\Gamma$ (sc. ABG), que l'intersection entre ce plan et la grandeur solide soit la figure Z ; soit K le centre de la terre ; imaginons une pyramide comprenant la figure Z , comme précédemment¹, et ayant pour sommet le point K ; que ses plans (sc. ses faces) soient coupés par le plan $AB\Gamma$ suivant les droites AK et KB ; prenons une autre pyramide, égale et semblable à la première ; que ses plans (sc. ses faces) soient coupés par le plan (sc. $AB\Gamma$) suivant les droites KB et $K\Gamma$; décrivons dans le liquide, autour de K comme centre, mais au-dessous de la grandeur solide, une autre surface de sphère, dont l'intersection avec le même plan soit l'arc $\Xi O\Pi$; imaginons une grandeur H , découpée dans le liquide et située dans la seconde pyramide ; que cette grandeur soit égale à la grandeur solide Z ; dès lors, les parties du liquide dans la première pyramide, qui s'étendent sous la surface marquée par l'arc ΞO , et celles dans la deuxième pyramide, qui s'étendent sous la surface marquée par l'arc $O\Pi$, sont disposées de la même manière et contiguës les unes aux autres. Mais elles sont comprimées d'une manière inégale ; car celles qui sont dans la première pyramide sont comprimées par la grandeur solide Z et par le liquide qui l'entoure et qui est contenu dans la région de la pyramide marquée par les points A , B , O , Ξ , et celles qui sont dans la seconde pyramide sont comprimées par le liquide qui les entoure et qui est contenu dans

1. Cf. prop. 3.

δὴ τι ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διὰ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς
 καὶ διὰ τοῦ ὕγρου καὶ τοῦ στερεοῦ μεγέθους, τεμνέσθω
 δὲ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἡ μὲν τοῦ ὕγρου ἐπιφάνεια
 κατὰ τὰν ΑΒΓ περιφέρειαν, τὸ δὲ στερεὸν μέγεθος κατὰ
 5 τὸ σχῆμα, ἐν ᾧ Ζ, κέντρον δὲ ἔστω τᾶς γᾶς τὸ Κ, νοείσθω
 δέ τις πυραμὶς περιλαμβάνουσα τὸ Ζ σχῆμα, καθ' ἃ
 καὶ πρότερον, κορυφὰν ἔχουσα τὸ Κ σαμεῖον, τεμνέσθω
 δὲ αὐτᾶς τὰ ἐπίπεδα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ κατὰ
 10 τὰς ΑΚ, ΚΒ, λελάφθω δέ τις καὶ ἄλλα ἴσα πυραμὶς καὶ
 ὁμοία ταῦτα, τεμνέσθω δὲ αὐτᾶς τὰ ἐπίπεδα ὑπὸ τοῦ
 ἐπιπέδου κατὰ τὰς ΚΒ, ΚΓ, γεγράφθω δέ τις καὶ ἄλλας
 σφαίρας ἐπιφάνεια ἐν τῷ ὕγρῳ περὶ κέντρον τὸ Κ, ὑποκάτω
 δὲ τοῦ στερεοῦ μεγέθους, τεμνέσθω δ' αὐτὰ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ
 ἐπιπέδου κατὰ τὰν ΞΟΠ περιφέρειαν, νοείσθω δὲ καὶ
 15 μέγεθος ἀπολαμβάνόμενον τοῦ ὕγρου τὸ κατὰ τὸ Η ἐν
 τῇ ὕστερον πυραμίδι ἴσον τῷ κατὰ τὸ Ζ στερεῷ· τὰ δὲ
 μέρη τοῦ ὕγρου τοῦ ἐν τῇ πρώτῃ πυραμίδι τὰ ὑπὸ τὰν
 ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰν ΞΟ περιφέρειαν καὶ τοῦ ἐν τῇ
 20 δευτέρᾳ τὰ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰν ΟΠ περι-
 φέρειαν ἐξ ἴσου τέ ἐντι κείμενα καὶ συνεχέα ἀλλάλοις.
 Οὐχ ὁμοίως δὲ θλίβονται· τὸ μὲν γὰρ ἐν τῇ πρώτῃ
 πυραμίδι θλίβεται τῷ κατὰ τὸ Ζ στερεῷ μεγέθει καὶ τῷ
 περιέχοντι ὕγρῳ αὐτὸ καὶ ἐόντι ἐν τῷ τόπῳ τᾶς πυραμίδος
 τῷ κατὰ τὰ Α, Β, Ο, Ξ, τὸ δ' ἐν τῇ ἐτέρᾳ πυραμίδι θλίβεται
 25 τῷ ὕγρῳ τῷ περιέχοντι αὐτὸ καὶ ἐόντι τᾶς πυραμίδος ἐν

5 κέντρον — 6 τις rest. Heiberg : centrum autem terrae sit
 k, intelligatur autem quaedam \mathcal{Z} || 11 ἐπιπέδου C : plano
 ■ b g ms. \mathcal{Z} || 14 περιφέρειαν C : om. \mathcal{Z} || 15 τὸ pr. \mathcal{Z} : om. C || 16
 τῷ \mathcal{Z} : τὸ C || στερεῷ \mathcal{Z} : στερεόν C || δὴ Heiberg : δὲ codd. ||
 17-18 τὰν ἐπιφάνειαν C : superficibus \mathcal{Z} || 18 τὰν alt. \mathcal{Z} : τὰ C ||
 περιφέρειαν C : superficiem \mathcal{Z} || τοῦ Heiberg : τὸ codd. || 19 τὰ \mathcal{Z} :
 τῶν C || 19 τὰν ἐπιφάνειαν C : superficibus \mathcal{Z} || τὰν alt. Hei-
 berg : τὸν C || 19-20 περιφέρειαν C : superficiem \mathcal{Z} || 21 τὸ C :
 quae \mathcal{Z} || 23 αὐτὸ C : ipsam \mathcal{Z} || 24 τῷ C : quae \mathcal{Z} .

la région de la pyramide marquée par les points Π , O , B , Γ ; or le poids de Z est inférieur au poids de H , du moment que Z et H ont bien la même grandeur alors que par hypothèse la grandeur solide est plus légère que la grandeur liquide, et parce que, de plus, les poids des portions de fluide entourant les grandeurs Z et H dans chacune des pyramides sont égaux; il s'ensuit que la partie du liquide située au-dessous de la surface marquée par l'arc $O\Pi$ sera comprimée davantage; elle poussera donc de sa place la partie moins comprimée, et le liquide ne restera pas immobile¹. Mais on l'avait supposé immobile; par conséquent, (sc. la grandeur solide) ne sera pas immergée entièrement, mais une de ses parties sera à l'extérieur de la surface du liquide.

5.

Toute grandeur solide plus légère qu'un liquide (sc. de même volume), abandonnée dans ce liquide, y sera immergée jusqu'à un niveau tel que le liquide qui occuperait le volume de la partie immergée a le même poids que la grandeur entière.

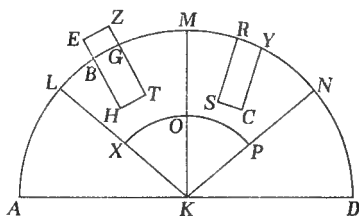


Fig. 89

Construisons la même figure que plus haut. Que le liquide soit en état de repos; soit $EZH\Theta$ une grandeur

1. Cf. les principes préc. la prop. 1.

- τῷ τόπῳ τῷ κατὰ τὰ Π, Ο, Β, Γ, ἔστι δὲ τὸ βάρος τὸ κατὰ
 <τὸ Ζ ἔλασσον τοῦ βάρους τοῦ κατὰ τὸ> Η, ἐπειδὴ τῷ
 μὲν μεγέθει ἴσον ἐστίν, κουφότερον δὲ ὑπόκειται τὸ
 στερεὸν μέγεθος εἶμεν τοῦ ὑγροῦ, τὰ δὲ τοῦ περιέχοντος
 5 ὑγροῦ τὰ Ζ, Η μεγέθη ἐν ἑκατέρᾳ τὰν πυραμίδων ἴσα ·
 μᾶλλον οὖν θλιβήσεται τὸ μέρος τοῦ ὑγροῦ τὸ ὑπὸ τὰν
 ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰν ΟΠ περιφέρειαν · ἐξωθήσει οὖν
 τὸ ἦσσον θλιβόμενον, καὶ οὐ μενεῖ τὸ ὑγρὸν ἀκίνητον.
 Ὑπέκειτο δέ · οὐκ ἄρα καταδύσεται ὅλον, ἀλλ' ἐσσεῖται
 10 τι αὐτοῦ ἐκτὸς τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

ε'.

- Τῶν στερεῶν μεγεθέων ὃ καὶ ἡ κουφότερον τοῦ ὑγροῦ,
 ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν ἐς τοσοῦτο καταδύσεται, ὥστε ταλι-
 κοῦτον ὄγκον τοῦ ὑγροῦ, ἀλίκος ἐστὶν ὁ τοῦ καταδεδυκότος
 15 ὄγκος, ἴσον βάρος ἔχειν ὅλῳ τῷ μεγέθει.

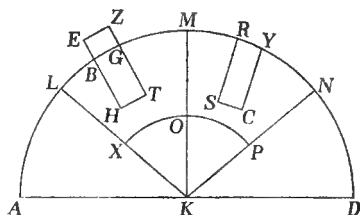


Fig. 89

Κατεσκευάσθω ταῦτα τοῖς πρότερον, καὶ ἔστω τὸ
 ὑγρὸν ἀκίνητον, ἔστω δὲ κουφότερον τοῦ ὑγροῦ τὸ

1 τὰ Heiberg : τὸ C || 2 τὸ Ζ ἔλασσον τοῦ βάρους τοῦ κατὰ
 τὸ rest. Heiberg : z minor grauitate humidi quod secundum
 3 || H ms. 4 : ZH ms. C || 4 τοῦ alt. add. Heiberg || 5 ἐν
 ἑκατέρᾳ Heiberg : ἑκατέρᾳ C utraque 6 || 6-7 τὰν ἐπιφάνειαν
 Heiberg : τὴν ἐπιφάνειαν C superficiebus 7 || 8 ἦσσον 9 : ἴσον
 C || 9 ἐσσεῖται Heiberg : ἐσσεται C || 13 ἐς add. Heiberg || 16
 κατεσκευάσθω Heiberg : κατασκευάσθω C disponantur autem 16.

plus légère que le liquide. Du moment donc que le liquide est en état de repos, les parties de ce liquide qui sont disposées d'une manière égale subissent une compression égale¹; seront donc comprimés de la même manière le liquide qui s'étend sous la surface contenant l'arc ΞO et le liquide qui s'étend sous la surface contenant l'arc ΠO , de façon que les poids qui les compriment sont égaux. Or le poids du liquide contenu dans la première pyramide, au solide $BH\Theta\Gamma$ près, est égal au poids du liquide contenu dans la seconde pyramide, au liquide $P\Sigma T\Upsilon$ près. Il est donc évident que le poids de la grandeur $EZH\Theta$ est égal au poids du liquide $P\Sigma T\Upsilon$. Il est donc manifeste que le liquide qui occuperait le volume de la partie immergée de la grandeur solide a le même poids que cette grandeur entière.

6.

Les corps solides plus légers qu'un liquide (sc. de même volume), plongés par force dans ce liquide, sont renvoyés vers le haut avec une force égale au poids dont le liquide, qui occuperait le même volume que la grandeur solide, l'emporte sur le poids de cette grandeur.

Soit A une certaine grandeur plus légère qu'un liquide, B le poids de la grandeur A , la somme de B et Γ le poids du liquide ayant le même volume que la grandeur A . Il faut démontrer que la grandeur A ,

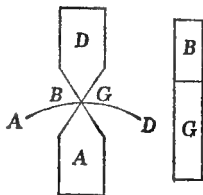


Fig. 90

1. Cf. les principes préc. la prop. 1.

ΕΖΗΘ μέγεθος. Ἐπεὶ οὖν ἀκίνητόν ἐστιν τὸ ὑγρόν, ὁμοίως θλιβήσεται τὰ μέρη αὐτοῦ τὰ ἐξ ἴσου κείμενα · ὁμοίως ἄρα θλιβήσεται τὸ ὑγρόν τὸ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰς ΕΟ καὶ ΠΟ περιφερείας · ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ βάρος, ᾧ θλίβονται. Ἔστι δὲ καὶ τοῦ ὑγροῦ τὸ βάρος τοῦ ἐν τῇ πρώτῃ πυραμίδι χωρὶς τοῦ ΒΗΘΓ στερεοῦ ἴσον τῷ βάρει τῷ <τοῦ ἐν τῇ ἐτέρᾳ πυραμίδι> χωρὶς τοῦ ΡΣΤΥ ὑγροῦ · δηλὸν οὖν ὅτι τὸ τοῦ ΕΖΗΘ μέγεθος βάρος ἴσον ἐστὶ τῷ τοῦ ΡΣΤΥ ὑγροῦ βάρει. Φανερόν οὖν ὅτι ταλικοῦτος ὄγκος τοῦ ὑγροῦ, ἀλίκον ἐστὶ τὸ δεδυκὸς τοῦ στερεοῦ μεγέθεος, ἴσον βάρος ἔχει ὅλῳ τῷ μεγέθει.

ζ'.

Τὰ κουφότερα στερεὰ τοῦ ὑγροῦ βιασθέντα εἰς τὸ ὑγρόν ἀναφέρεται τοσαύτα βία ἐς τὸ ἄνω, ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος, ᾧ βαρύτερόν ἐστι τοῦ μεγέθεος τὸ ὑγρόν τὸ ἴσον ὄγκον ἔχον τῷ μεγέθει.

Ἔστω τι μέγεθος τὸ Α κουφότερον τοῦ ὑγροῦ, ἔστω δὲ τοῦ μὲν μεγέθεος τοῦ ἐν ᾧ Α βάρος τὸ Β, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος τῷ Α τὸ ΒΓ. Δεικτέον ὅτι τὸ

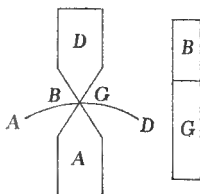


Fig. 90

4 τὰς ΕΟ Heiberg : τὰς ΝΕΟ ms. C || περιφερείας Heiberg : περιφέρειαν C || 5 τοῦ alt. Heiberg : τὸ C || 6 ΒΗΘΓ ms. ζ : ΒΗΘ ms. C || 7 τοῦ ἐν τῇ ἐτέρᾳ πυραμίδι rest. Heiberg : humidi quod in altera pyramide ζ || 14-15 ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος C : om. ζ || 15 ᾧ Heiberg : δ C quanto ζ || 17 τι C enim ζ.

plongée par force dans le liquide, sera renvoyée vers le haut avec une force égale au poids Γ .

Donnons-nous en effet une certaine grandeur Δ ayant un poids égal au poids Γ . La grandeur constituée par la somme des deux grandeurs A et Δ est donc plus légère que le liquide ; car le poids de la grandeur somme de ces deux grandeurs est $B + \Gamma$, et le poids du liquide ayant le même volume que cette grandeur (sc. $A + \Delta$) est supérieur à $B + \Gamma$, puisque $B + \Gamma$ est le poids du liquide ayant le même volume que la grandeur A . Abandonnée, par conséquent, dans le liquide, la grandeur somme des deux grandeurs A et Δ sera immergée jusqu'à un niveau tel que le liquide qui occuperait le volume de la partie immergée de la grandeur (sc. donnée) a le même poids que la grandeur entière, comme cela a été démontré¹. Que l'arc $AB\Gamma\Delta$ soit (c'est-à-dire marque) la surface d'un certain liquide. Puisque, dans ces conditions, le liquide qui occuperait un volume égal à celui de la grandeur A a le même poids que la somme des grandeurs A et Δ , il est évident que la partie immergée de cette somme sera la grandeur A , et que le reste de cette somme, à savoir la grandeur Δ , sera entièrement au-dessus de la surface du liquide. Car si le solide était immergé d'une autre manière, ce serait contraire à ce qui a été démontré plus haut². Il est donc évident que la grandeur A est poussée vers le haut avec une force égale à celle avec laquelle la grandeur Δ , située au-dessus d'elle la pousse vers le bas³, puisqu'aucune des deux forces ne cède à l'autre. Mais la grandeur Δ presse vers le bas d'un poids égal à Γ , du moment qu'on avait supposé le poids de la grandeur Δ égal au poids Γ . La proposition qu'il fallait démontrer est donc évidente.

1. Cf. prop. 5.

2. Les manuscrits présentant une lacune à cet endroit du texte, le raisonnement de la dernière phrase est reconstitué d'après les conjectures de Heiberg.

3. Trad. d'après les conjectures de Heiberg.

Α μέγεθος βιασθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν ἀνοισσεῖται ἐς τὸ ἐπάνω τοσαύτῃ βίᾳ, ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος τὸ Γ.

Λελάφθω γάρ τι μέγεθος τὸ ἐν ψ τὸ Δ βάρος ἴσον ἔχον τῷ Γ· τὸ δὴ μέγεθος τὸ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ἐν οἷς

- 5 Α, Δ μεγεθῶν ἐς τὰ αὐτὰ συντεθέντων κουφότερόν ἐστι τοῦ ὑγροῦ· ἔστι γὰρ τοῦ μὲν μεγέθεος τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων βάρος τὸ ΒΓ, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος αὐτῷ μείζον τοῦ ΒΓ διὰ τὸ τοῦ ἴσον ἔχοντος ὄγκον τῷ τοῦ Α τὸ βάρος εἶμεν τὸ ΒΓ. Ἀφεθὲν οὖν ἐς τὸ ὑγρὸν τὸ μέγεθος
- 10 τὸ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Δ συγκείμενον ἐς τοσοῦτον δύσεται, (ἔστε κα ταλικοῦτος ὄγκος τοῦ) ὑγροῦ, ἀλίκον καὶ τὸ δεδυκὸς τοῦ μεγέθεος, ἴσον βάρος ἔχη τῷ ὅλῳ μεγέθει· δέδεικται γὰρ τοῦτο. Ἔστω δὴ ἐπιφάνειά τινος ὑγροῦ ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια. Ἐπεὶ οὖν ὁ ταλικοῦτος
- 15 ὄγκος τοῦ ὑγροῦ, ἀλίκον ἐστὶ τὸ Α μέγεθος, ἴσον βάρος ἔχει τοῖς Α, Δ μεγέθεσιν, δηλὸν ὅτι τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ Α μέγεθος, τὸ δὲ λοιπὸν αὐτοῦ, ἐν ψ Δ, ἐσσεῖται ὅλον ὑπὲρ τῆς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας· εἰ γὰρ α... δέδυκεν τὸ στερεόν, ἔπεται..... τοῦτου δεδειγμένου.
- 20 Δῆλον οὖν ὅτι ἐς τὸ ἄνω φέρεται τὸ Α μέγεθος..... ὑπὸ τοῦ ἄνω τοῦ Δ ἐς τὸ κάτω, ἐπεὶ οὐδέτερον ὑπ' οὐδετέρου ἐξωθεῖτο. Ἀλλὰ τὸ Δ ἐς τὸ κάτω θλίβει τοσοῦτῳ βάρει, ἀλίκον ἐστὶ τὸ Γ· ὑπέκειτο γὰρ τὸ βάρος τοῦ ἐν ψ τὸ Δ εἶμεν ἴσον τῷ Γ· δηλὸν οὖν ψ ἔδει δεῖξαι.

5 συντεθέντων Heiberg : συντεθὲν codd. || 7-8 αὐτῷ μείζον C : ipsis est maior \mathcal{L} || 9 ἀφεθὲν οὖν ἐς Heiberg : ἀφεθὲν οὖν ἔστω C dimittatur igitur in \mathcal{L} || 10 συγκείμενον \mathcal{L} : συγκειμένων C || 11 ἔστε κα — τοῦ rest. Heiberg : donec tanta moles \mathcal{L} || ἀλίκον \mathcal{L} : ἄδικον C || 12 καὶ C : est \mathcal{L} || ἔχη \mathcal{L} : ἔχει C || 13 δὴ Heiberg : δὲ codd. || 14 περιφέρεια \mathcal{L} : περιφερείας C || 18 εἰ γὰρ — 19 δεδειγμένου C : si enim (seq. lacuna) \mathcal{L} || 19 sq. restitutio incerta || 20 δῆλον — 21 κάτω C : palam igitur quod quanta ui magnitudo a refertur ad superius tanta premitur ad inferius \mathcal{L} || 21 τὸ Heiberg : τῷ C || 24 τοῦ \mathcal{L} : τὸ C.

7.

Les grandeurs plus lourdes qu'un liquide (sc. de même volume), abandonnées dans ce liquide, descendent vers le bas jusqu'à ce qu'elles aient atteint le fond, et elles seront allégées dans le liquide du poids du liquide contenu dans un volume égal au volume de la grandeur solide.

Il est évident que ces grandeurs descendront vers le bas, jusqu'à ce qu'elles aient atteint le fond ; car les parties du liquide qui s'étendent au-dessous d'une telle grandeur subiront une plus forte compression que les parties qui sont au niveau de ces grandeurs, du moment qu'on a supposé la grandeur solide plus lourde que le liquide ; il reste à démontrer que ces grandeurs seront allégées comme nous venons de l'indiquer.

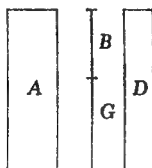


Fig. 91

Soit la grandeur A, plus lourde que le liquide (sc. de même volume) ; soit $B + \Gamma$ le poids de la grandeur A, B le poids du liquide contenu dans un volume égal à celui de la grandeur A. Il faut démontrer que la grandeur A, plongée dans le liquide, aura un poids égal à Γ .

Prenons, en effet, une certaine grandeur Δ plus légère que le liquide contenu dans un volume égal à celui de Δ ; que le poids de la grandeur Δ soit égal au

ζ'.

Τὰ βαρύτερα τοῦ ὑγροῦ ἀφεθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν οἰσεῖται
κάτω, ἔστ' ἂν καταβᾶντι, καὶ ἐσσοῦνται κουφότερα ἐν
τῷ ὑγρῷ τοσοῦτον, ὅσον ἔχει τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦ
5 ταλικοῦτον ὄγκον ἔχοντος, ἀλίκος ἐστὶν ὁ τοῦ στερεοῦ
μεγέθεος ὄγκος.

Ὅτι μὲν οὖν οἰσεῖται ἐς τὸ κάτω, ἔστ' ἂν καταβᾶντι,
δῆλον · τὰ γὰρ ὑποκάτω αὐτοῦ μέρεια τοῦ ὑγροῦ θλιβη-
σοῦνται μᾶλλον τῶν ἐξ ἴσου αὐτοῖς κειμένων μερέων,
10 ἐπειδὴ βαρύτερον ὑπόκειται τὸ στερεὸν μέγεθος τοῦ
ὑγροῦ · ὅτι δὲ κουφότερα ἐσσοῦνται, ὡς εἴρηται, δειχθή-
σεται.

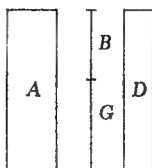


Fig. 91

Ἐστω τι μέγεθος τὸ Α, ■ ἐστὶ βαρύτερον τοῦ ὑγροῦ,
βάρος δὲ ἔστω τοῦ μὲν ἐν ᾧ Α μέγεθεος τὸ ΒΓ, τοῦ δὲ
15 ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος τῷ Α τὸ Β. Δεικτέον ὅτι
τὸ Α μέγεθος ἐν τῷ ὑγρῷ ἐὸν βάρος ἔξει ἴσον τῷ Γ.

Λελάφθω γάρ τι μέγεθος τὸ ἐν ᾧ τὸ Δ <κουφότερον
τοῦ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος αὐτῷ, ἔστω> δὲ τοῦ
μὲν ἐν ᾧ τὸ Δ μέγεθεος βάρος ἴσον τῷ ■ βάρει, τοῦ δὲ

7 ἔστ' ἂν καταβᾶντι Heiberg : εστου κατ' βαντι ζ καταβᾶντι
incertum in C || 8 αὐτοῦ C : ipsis ζ || 13 τι C : enim aliqua ζ ||
τὸ ζ : om. fort. C || 17 τι C : aliqua alia ζ || κουφότερον — 19 βάρει
rest. Heiberg : leuior humido molis aequalis cum ipsa, sit autem
magnitudinis quidem in qua d grauitas aequalis grauitati b
ms. ζ || 19 μεγέθεος βάρος Heiberg : μέγεθος βάρει C || βάρει
Heiberg : βάρος C.

poids B, et le poids du liquide ayant le même volume que Δ égal au poids $B + \Gamma$. Si on réunissait, dès lors, en une seule grandeur les deux grandeurs A et Δ , la grandeur ainsi composée aurait le même poids que le liquide (sc. contenu dans un volume égal à la somme des volumes de A et de Δ) ; car le poids de la somme de ces deux grandeurs est égal à la somme des poids $B + \Gamma$ et B, et d'autre part le poids du liquide ayant un volume égal à la somme des volumes des deux grandeurs est égal à la somme des mêmes poids. Abandonnées dans le liquide, les deux grandeurs feront donc équilibre au liquide sans monter vers le haut ni descendre vers le bas ; ainsi donc la grandeur A tendra bien à descendre, mais sera tirée avec la même force vers le haut par la grandeur Δ , alors que la grandeur Δ , du moment qu'elle est plus légère que le liquide, tendra à monter avec une force égale au poids Γ ; on a démontré, en effet, que les grandeurs solides plus légères qu'un liquide (sc. de même volume), plongées par force dans ce liquide, tendent à remonter vers le haut avec une force égale au poids dont le liquide, qui occuperait le même volume que la grandeur, l'emporte sur le poids de la grandeur¹. Or le liquide contenu dans un volume égal à celui de la grandeur Δ est plus lourd que Δ d'un poids égal à Γ ; il est donc évident que la grandeur A tendra elle aussi à descendre avec une force égale au poids Γ .

Nous supposerons que toutes les grandeurs qui, dans un liquide, tendent vers le haut y montent suivant la verticale menée par leur centre de gravité.

1. Cf. prop. 6.

- ὕγρου τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος τῷ Δ μεγέθει τὸ βάρος
 ἔστω ἴσον τῷ ΒΓ βάρει. Συντεθέντων δὴ ἐς τὸ αὐτὸ τῶν
 μεγεθῶν, ἐν οἷς τὰ Α, Δ, τὸ τῶν συναμφοτέρων μέγεθος
 ἰσοβαρὲς ἐσσεῖται τῷ ὑγρῷ· ἔστι γὰρ τῶν μεγεθῶν
 5 συναμφοτέρων τὸ βάρος ἴσον συναμφοτέροις τοῖς βάρεσιν
 τῷ τε ΒΓ καὶ τῷ Β, τοῦ δὲ ὕγρου τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος
 ἀμφοτέροις τοῖς μεγέθεσι τὸ βάρος ἴσον ἐστὶ τοῖς αὐτοῖς
 βάρεσιν. Ἀφθέντων οὖν τῶν μεγεθῶν ἐς τὸ ὑγρὸν
 ἰσορροπησονται τῷ ὑγρῷ καὶ οὔτε εἰς τὸ ἄνω οἰσούνται
 10 οὔτε εἰς τὸ κάτω· διὸ τὸ μὲν ἐν ψ Α μέγεθος οἰσεῖ <ται
 ἐς τὸ κάτω καὶ τοσαύτῃ βίᾳ ψ >πὸ τοῦ ἐν ψ Δ μεγέθους
 ἀνέλκεται ἐς τὸ ἄνω, τὸ δὲ ἐν ψ Δ μέγεθος, ἐπεὶ κουφότερόν
 ἐστὶ τοῦ ὕγρου, ἀνοισεῖται εἰς τὸ ἄνω τοσαύτῃ βίᾳ, ὅσον
 ἐστὶ τὸ Γ βάρος· δέδεικται γὰρ ὅτι τὰ κουφότερα τοῦ
 15 ὕγρου μεγέθεα στερεὰ βιασθέντα ἐς τὸ ὑγρὸν ἀναφέρονται
 τοσαύτῃ βίᾳ ἐς τὸ ἄνω, ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος, ψ βαρύτερόν
 ἐστὶ τοῦ μεγέθους τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσογκον τῷ μεγέθει. Ἔστι
 δὲ τῷ Γ βάρει βαρύτερον τοῦ Δ μεγέθους τὸ ὑγρὸν τὸ
 ἴσον ὄγκον ἔχον τῷ Δ· δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐν ψ Α
 20 μέγεθος ἐς τὸ κάτω οἰσεῖ <ται τοσοῦτῃ βάρει, ὅσον ἐστὶ
 τὸ Γ>.

Ὑποκεί<σθω τῶν ἐν τῷ ὑγρῷ ἄνω> φερομένων ἕκαστον
 ἀναφέρεσθαι κατὰ τὴν κάθετον τὴν διὰ τοῦ κέντρου τοῦ
 βάρεος αὐτοῦ ἀγμέναν.

2 ἐς τὸ αὐτὸ C : om. \mathcal{L} || 8 ἐς C : et proiectis in \mathcal{L} || 9-10
 οἰσούνται οὔτε εἰς τὸ κάτω Heiberg : om. C neque ad deorsum
 \mathcal{L} || 11 ἐς τὸ κάτω καὶ τοσαύτῃ βίᾳ rest. Heiberg : ad deorsum
 et tanta vi \mathcal{L} || 11 ἐν \mathcal{L} : eu ἐν C || 12 ἐς τὸ ἄνω C : om. \mathcal{L} ||
 16 ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος C : om. \mathcal{L} || ψ Heiberg : ὡς C quanto \mathcal{L}
 || 17 ἴσογκον Heiberg : ἴσον ὄγκον C aequè molis \mathcal{L} || τῷ μεγέθει
 \mathcal{L} : τῷ Δ μεγέθει C || 19 τὸ add. Heiberg || 20-21 ἐς τὸ κάτω
 — τὸ Γ rest. Heiberg : fertur in deorsum tanta gravitate quanta
 est g ms. \mathcal{L} || 22 ὑποκείσθω — ἄνω rest. Heiberg : supponatur
 eorum quae in humido sursum \mathcal{L} || 24 αὐτοῦ Heiberg : ipso-
 rum \mathcal{L} .

8.

Si une grandeur solide, plus légère qu'un liquide, ayant la figure d'un segment sphérique, est abandonnée dans ce liquide de manière que la base du segment ne soit pas en contact avec le liquide, la figure se dressera droite, de façon que l'axe du segment soit orienté suivant la verticale ; et si la figure se trouve tirée par quelque force de manière que la base du segment touche le liquide, elle ne restera pas inclinée si on l'abandonne, mais se redressera droite.

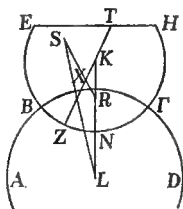


Fig. 92

Imaginons en effet une certaine grandeur, telle que nous venons de l'indiquer, abandonnée dans un liquide, et un plan passant par l'axe du segment et par le centre de la terre. Soit $AB\Gamma\Delta$ la section de la surface du liquide, l'arc $EZH\Theta$ la section de la figure abandonnée dans le liquide ; soit ΘZ l'axe du segment. Le centre de la sphère est donc situé sur la droite ΘZ .

En premier lieu, si le segment est supérieur à l'hémisphère, que le centre soit K , et que la figure soit, si possible, inclinée, soit par l'effet de quelque force,

soit par elle-même. Ce qu'il faut démontrer, c'est qu'elle ne restera pas (sc. dans cette position), mais qu'elle se redressera droite, de manière que les points Z et Θ soient situés sur la (sc. même) verticale.

En effet, la figure étant supposée inclinée, les points Z et Θ ne sont pas sur la (sc. même) verticale. Menons donc par les points K et Λ la droite $K\Lambda$ et supposons que Λ soit le centre de la terre. La (sc. partie de la) figure enveloppée, dans le liquide, par la surface du liquide a donc son axe sur la droite $K\Lambda$; car si deux surfaces sphériques se coupent l'une l'autre, la figure d'intersection est un cercle perpendiculaire à la droite joignant les centres des deux sphères¹. Le centre de gravité de la figure enveloppée dans le liquide suivant l'arc $BN\Gamma$ est donc situé sur la droite $K\Lambda$. Soit P ce centre de gravité. Mais le centre de gravité du segment entier, suivant l'arc ΘHZE , est situé sur la droite $Z\Theta$; soit Ξ ce centre de gravité. Il s'ensuit que le centre de gravité de la partie de la figure restante, située en dehors de la surface du liquide, se trouve sur le prolongement de $P\Xi$, à l'extrémité Σ d'un segment de droite $\Sigma\Xi$ tel que le rapport de $\Sigma\Xi$ à ΞP est égal au rapport du poids de la partie du segment (sc. de sphère) suivant l'arc $BN\Gamma$ au poids de la partie du segment qui est à l'extérieur du liquide; car cette propriété a été démontrée². Soit donc Σ le centre de gravité de la figure indiquée. Du moment que le poids de la figure située à l'extérieur du liquide tend vers le bas suivant la droite $\Lambda\Sigma$, et que la partie de la figure située dans le liquide tend vers le haut³ suivant la droite PK , il est évident que la figure ne restera pas en état de repos, mais que ses parties situées du côté de E se

1. Cf. Eucl. I, 4, 8, 13; III, 9; XI, 4.

2. Cf. *De l'équil. des fig. planes*, I, 8.

3. Cf. prop. 7.

ἦτοι ὑπό τινος κλιθὲν ἢ καθ' αὐτό. Δεικτέον οὖν ὅτι οὐ μενεῖ, ἀλλ' εἰς ὀρθὸν ἀποκαταστασείται, ὥστε τὰ Ζ, Θ κατὰ κάθετον εἶμεν.

- Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται κεκλίσθαι τὸ σχῆμα, οὐκ ἔστι
 5 τὰ Ζ, Θ κατὰ κάθετον. Ἀχθῶ δὴ διὰ τοῦ Κ καὶ τοῦ Λ ἁ ΚΛ, τὸ δὲ Λ κέντρον ὑποκείσθω τᾶς γᾶς · τὸ δὴ σχῆμα τὸ ἐν τῷ ὑγρῷ ἀπολελαμμένον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τὸν ἄξονα ἔχει ἐπὶ τᾶς ΚΛ · εἰ γάρ κα δύο σφαιρᾶν ἐπιφάνειαι τέμνωντι ἀλλάλας, ἁ τομὰ κύκλος ἐστὶν ὀρθὸς
 10 ποτὶ τὰν εὐθεῖαν τὰν ἐπιζευγνύουσαν τὰ κέντρα τὰν σφαιρᾶν. Ἔστιν οὖν τοῦ σχήματος τοῦ κατὰ τὰν ΒΝΓ περιφέρειαν ἀπολαμβανομένου ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾶς ΚΛ · ἔστω τὸ Ρ. Τοῦ δὲ τμάματος ὅλου τοῦ κατὰ τὰν ΘΗΖΕ περιφέρειαν τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ
 15 βάρους ἐπὶ τᾶς ΖΘ · ἔστω τὸ Ξ. Τοῦ ἄρα <λοιποῦ σχήματος τοῦ ἐκτὸς> τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾶς ΡΞ ἐστὶν ἐκβληθείσας καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς τᾶς ΣΞ ποτὶ τὰν ΞΡ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχούσας, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ κατὰ τὰν ΒΝΓ περιφέρειαν τοῦ
 20 τμάματος ποτὶ τὸ βάρος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ · δέδεικται γὰρ ταῦτα. Ἔστω δὴ τὸ Σ κέντρον τοῦ εἰρημένου σχήματος. Ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν σχήματος, ■ ἐστὶν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, τὸ βάρος ἐς τὸ κάτω φέρεται κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΛΣ, τὸ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ ἐς τὸ ἄνω κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΡΚ, δηλὸν
 25 ὥς οὐ μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὰ ποτὶ τῷ Ε μέρεια αὐτοῦ

1 καθ' αὐτό Heiberg : ταυτό C || 5 Θ Heiberg : Ε ms. C || 5-6 Λ ἁ ΚΛ Heiberg : ΛΑΚΛ ms. C || 9 τέμνωντι Heiberg : τέμνοντι C || ὀρθὸς Heiberg : ὀρθὸν C || 10-11 τὰν σφαιρᾶν Heiberg : τᾶς σφαίρας C || 11 ΒΝΓ Heiberg : ΒΗΓ ms. C || 14 ΘΗΖΕ Heiberg : ΘΗΖ ms. C || 17 ἐστὶν add. Heiberg || 18 ΣΞ Heiberg : ΕΞ ms. C || ἐχούσας add. Heiberg || 23 κατὰ Heiberg : κα C || 24 ἐν Heiberg : ΕΝ ms. C || ἐς τὸ ἄνω Heiberg : ἔστω ἂν C || τὰν εὐθεῖαν τὰν Heiberg : τᾶς εὐθείας τᾶς C || 25 τῷ Ε Heiberg : τὰν ΕΗ ms. C.

déplaceront vers le bas, alors que les parties situées du côté de H iront vers le haut, et elles se déplaceront de cette manière jusqu'à ce que la droite $Z\Theta$ s'oriente suivant la verticale. La droite $Z\Theta$ une fois orientée suivant la verticale, les centres de gravité de la partie située dans le liquide et de la partie située hors du liquide se trouveront sur la même verticale, puisqu'ils seront situés sur la droite $Z\Theta$. Les poids se comprimeront donc l'un l'autre en sens contraire suivant la même verticale, l'un tendant vers le haut, l'autre vers le bas. La figure restera par conséquent en état de repos, aucune de ses deux parties n'étant poussée de sa place par l'autre.

La proposition reste vraie aussi pour les cas où la figure est un hémisphère ou un segment inférieur à un hémisphère.

9.

De même dans le cas où la (sc. même) figure plus légère que le liquide est abandonnée dans le liquide de manière que sa base soit entièrement dans le liquide, la figure se dressera droite de façon que son axe soit dans la direction de la verticale.

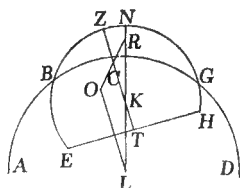


Fig. 93

ἐς τὸ κάτω οἰσοῦνται, τὰ δὲ ποτὶ τῷ Η ἐς τὸ ἄνω, καὶ αἰεὶ ἐς τὸ αὐτὸ οἰσοῦνται, ἕως καὶ ἡ ΖΘ κατὰ κάθετον γένηται. Κατὰ κάθετον δὲ γενομένης τῆς ΖΘ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐσσοῦνται τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ καὶ τοῦ ἐκτος ἐπὶ

- 5 τῆς αὐτῆς καθέτου · ἐπὶ γὰρ τῆς ΖΘ ἐσσοῦνται · ἀντι-
θλιψοῦνται οὖν ἀλλήλοις τὰ βάρη κατὰ τὴν αὐτὴν
κάθετον, τὸ μὲν ἐς τὸ κάτω φερόμενον, τὸ δὲ ἐς τὸ ἄνω.
Ὡστε μένει τὸ σχῆμα · οὐδέτερον γὰρ ὑπ' οὐδετέρου
ἐξωθήσεται.
- 10 Τὰ δ' αὐτὰ ἐσσεῖται καὶ εἴ καὶ τὸ σχῆμα ἡμισφαίριον
ἢ ἢ ἑλασσον ἡμισφαίριον.

θ'.

Καὶ τοίνυν, εἴ καὶ τὸ σχῆμα κουφότερον ἐὼν τοῦ ὑγροῦ ἀφεθῇ ἐς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὴν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν

- 15 εἴμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, ὀρθὸν καταστασεῖται τὸ σχῆμα οὕτως,
ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ κατὰ κάθετον εἴμεν.

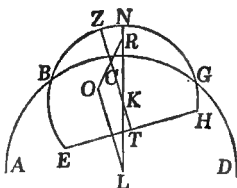


Fig. 93

1 ἐς τὸ pr. Heiberg : ἔστω C || τῷ Η ἐς τὸ Heiberg : τὰν Η ἔστω C || 5 ἐπὶ γὰρ Heiberg : ἐπιγραφὰς C || 6 βάρη Heiberg : β. α ms. C || 7 ἐς τὸ pr. Heiberg : ἔστω C || ἐς τὸ alt. Heiberg : ἔστω C || 9 ἐξωθήσεται scripsi (e p. 11, l. 3, cf. Heiberg, III, Index I, ἐξωθέω) : ἐξωθήσει (?) C || 10 καὶ Heiberg : κατὰ C || 11 ἢ Heiberg : τῇ C || ἑλασσον Heiberg : ἐλάσσων C || 13 εἴ καὶ Heiberg : si ἄ : εἰς C || 15 καταστασεῖται Heiberg : κατατασεῖται C : inside-bit ἄ || 16 ὥστε ἄ : ἔστω C || κατὰ κάθετον ἄ : καθ' ἑαυτὸν C.

Imaginons, en effet, une grandeur, telle que nous venons de l'indiquer, abandonnée dans le liquide; imaginons aussi un plan mené par l'axe du segment (sc. sphérique) et par le centre de la terre dont l'intersection avec la surface du liquide soit l'arc $AB\Gamma\Delta$ et l'intersection avec la figure l'arc EZH et la droite EH ; soit $Z\Theta$ l'axe du segment. Que $Z\Theta$ ne soit pas, si possible, dans la direction de la verticale; il faut démontrer que la figure ne restera pas (sc. dans cette position), mais se dressera droite.

Le centre de la sphère est donc sur $Z\Theta$, car nous supposerons de nouveau la figure, en premier lieu, supérieure à l'hémisphère; soit K ce centre; menons la droite $K\Lambda$ par K et par le centre de la terre Λ ; dès lors, la figure découpée en dehors du liquide par la surface du liquide a son axe sur la droite (sc. verticale) passant par K , et pour les mêmes raisons que précédemment¹ son centre de gravité est situé sur NK ; soit P ce centre. Mais le centre de gravité du segment entier est situé sur $Z\Theta$ entre les points K et Z ; soit T ce centre. Il s'ensuit que le centre de gravité du reste du segment, dans le liquide, sera situé sur le prolongement de la droite TP , à l'extrémité d'un segment de droite dont le rapport à TP est égal au rapport de la partie du segment (sc. de sphère) située à l'extérieur du liquide au poids de la figure située dans le liquide². Soit O le centre de cette dernière figure, et soit OA la verticale passant par O ; le poids de la partie du

1. Cf. prop. 8.

2. Cf. *De l'équil. des fig. planes*, I, 8.

Νοεῖσθω γάρ τι μέγεθος, οἷον εἴρηται, εἰς τὸ ὑγρὸν ἀφετώμενον, νοεῖσθω δὲ καὶ ἐπίπεδον ἀγόμενον διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμάματος καὶ διὰ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς, τομὰ δὲ ἔστω τᾶς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἃ ΑΒΓΔ περιφέρεια, 5 τοῦ δὲ σχήματος ἃ ΕΖΗ περιφέρεια καὶ ἃ ΕΗ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἃ ΖΘ. Εἰ οὖν δυνατόν, μὴ κατὰ κάθετον ἔστω ἃ ΖΘ · δεικτέον οὖν ὅτι οὐ μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ ἐπ' ὀρθὸν καταστασεῖται.

Ἔστι δὴ τὸ κέντρον τᾶς σφαίρας ἐπὶ τᾶς ΖΘ · πάλιν 10 γὰρ μείζον ἡμισφαίριου ἔστω πρῶτον τὸ σχῆμα · καὶ ἔστω τὸ Κ · διὰ δὲ τοῦ Κ καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς τοῦ Λ ἄχθω ἃ ΚΛ · τὸ δὴ σχῆμα τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ἀπολαμ- βανόμενον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τὸν ἄξονα ἔχει ἐπὶ τᾶς διὰ τοῦ Κ, καὶ διὰ ταῦτά τοῖς πρότερον 15 ἔστιν αὐτοῦ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾶς ΝΚ · ἔστω [γάρ] τὸ Ρ. Τοῦ δὲ ὅλου τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἔστιν ἐπὶ τᾶς ΖΘ > μεταξὺ τῶν Κ, Ζ · ἔστω τὸ Τ. Τοῦ ἄρα λοιποῦ σχήματος τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ κέντρον ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΤΡ εὐθείας ἐκβληθείσας καὶ ἀπολαφθείσας 20 τινός, ἃ ἔξει ποτὶ τὰν ΤΡ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμάματος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ποτὶ τὸ βάρος τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ · καὶ ἔστω τὸ Ο κέντρον τοῦ εἰρημένου σχήματος, καὶ διὰ τοῦ Ο κάθετος ἔστω ἃ ΟΛ · οἴσεῖται οὖν τὸ βάρος τοῦ μὲν τμάματος ὃ ἔστιν

2 ἀφετώμενον C : dimissa ℥ || 3 τᾶς γᾶς ℥ : τοῦ $\overline{\gamma\lambda\alpha}$ ms. C || 7 κάθετον ℥ : ὀρθὸν C || δεικτέον ℥ : εἰ κται C || 10 μείζον ℥ : om. C || 12 ΚΛ ms. ℥ : κατὰ C || δὴ Heiberg : om. C autem ℥ || 14 καὶ add. Heiberg || 15 τᾶς ΝΚ ms. ℥ : τασι $\overline{\text{IB}}$ ms. C || 16 γὰρ codd. : del. Heiberg || 16-17 κέντρον — ΖΘ rest. Heiberg : centrum grauitatis est in linea zt ms ℥ || 19 ΤΡ ms. ℥ : Τ ms. C || καὶ ἀπολαφθείσας ℥ : om. C || 20 ἃ ἔξει ποτὶ ℥ : δείξει $\frac{\epsilon}{\pi}$ ms. C || τὰν Heiberg : τὸν C || ὃν ℥ : om. C || 21 βάρος pr. ℥ : μέρος C || τοῦ sec. ℥ : om. C || ὑγροῦ ποτὶ ℥ : ὑπὸ τι C || 22 καὶ ἔστω Heiberg : κατὰ C sit autem ℥ || 22-23 κέντρον τοῦ ℥ : κέντρου C || 23 καὶ ℥ : om. C || Ο ms. ℥ : om. C || 23-24 ἃ ΟΛ Heiberg : τὸ Θ $\overline{\text{CL}}$ ms. C.

segment située à l'extérieur du liquide tendra donc vers le bas suivant la droite PA , et le poids de la figure située dans le liquide tendra vers le haut suivant la ligne OA ¹. Il s'ensuit que la figure ne restera pas en place, mais que les parties de la figure du côté du point H se déplaceront vers le bas, et les parties du côté de E vers le haut, et ce mouvement continuera jusqu'à ce que ΘZ soit orienté suivant la verticale².

1. Cf. prop. 7.

2. Archimède semble avoir omis de mentionner ici les deux cas où le corps flottant a la forme d'un hémisphère ou d'un segment sphérique inférieur à l'hémisphère ; cf. la fin de la prop. 8.

ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, κατὰ τὰν εὐθείαν τὰν ΡΛ ἐς τὸ κάτω,
 τοῦ δ' ἐν τῷ ὑγρῷ σχήματος κατὰ τὰν εὐθείαν τὰν ΟΛ
 ἐς τὸ ἄνω. Οὐκ ἄρα μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τοῦ σχήματος
 τὰ μὲν ποτὶ τῷ Η μέρεα οἰσοῦνται ἐς τὸ κάτω, τὰ δὲ ποτὶ
 5 τῷ Ε ἐς τὸ ἄνω, καὶ ἀεὶ τοῦτο ἐσσεῖται, ἔστε κα ΘΖ κατὰ
 κάθετον γένηται.

1 τὰν εὐθεϊαν τὰν ζ : τᾶς εὐθείας τᾶς C || ΡΛ ms. C : r o' ms. ζ || ἐς τὸ ζ : ἔστω C || 2 τὰν εὐθεϊαν τὰν ζ : τᾶς εὐθείας τᾶς C || ΟΛ ms. ζ : ΕΛ ms. C || 3 ἐς τὸ ζ : ἔστω C || 3-4 τοῦ σχήματος τὰ μὲν Heiberg : τὰ μὲν τοῦ σχήματος τὰ μὲν C partes quidem figurae quae ζ || 4 μέρεα Heiberg : μέρει C || οἰσοῦνται Heiberg : οἰσοῦται C || ἐς τὸ ζ : ἔστω C || 5 τῷ Heiberg : τὸ C || ἐς ζ : ἔσται C || ἔστε κα ζ : καὶ C || ΘΖ Heiberg : ΕΖ ms. C, zt ms. ζ.

DES CORPS FLOTTANTS II

1.

Si une grandeur plus légère qu'un liquide (sc. de même volume) est abandonnée dans le liquide, le rapport de son poids au (sc. poids du même volume de) liquide sera égal au rapport entre la partie immergée de la grandeur et la grandeur entière.

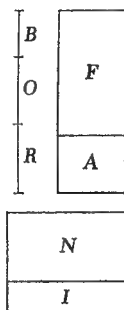


Fig. 94

Abandonnons en effet dans le liquide une grandeur solide ΦA plus légère que le liquide (sc. contenu dans le même volume) ; soit A sa partie immergée, Φ sa partie située en dehors du liquide. Il faut démontrer que le rapport entre le poids du solide ΦA et le poids du liquide de même volume est égal au rapport de A à ΦA (sc. $\Phi + A$).

Donnons-nous une certaine grandeur NI de ce liquide, ayant le même volume que le solide ΦA ; que N soit équivalent à Φ , I équivalent à A ; soit B le poids de la grandeur ΦA , PO celui de NI , P celui de I ; le rapport de ΦA à NI est dès lors égal au rapport de B à PO . Mais du moment que la grandeur ΦA a

B'.

α'.

Εἴ κα τι μέγεθος κουφότερον ἐόν τοῦ ὑγροῦ ἀφεθῇ
 ἐς τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἔξει τὸν λόγον τῷ βάρει ποτὶ τὸ
 5 ὑγρόν, ὃν ἔχει τὸ δεδυκὸς μέγεθος ποτὶ τὸ ὅλον μέγεθος.

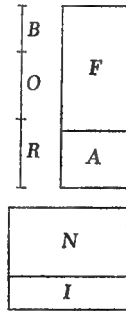


Fig. 94

Ἀφείσθω γάρ τι εἰς τὸ ὑγρόν μέγεθος στερεὸν τὸ ΦΑ
 κουφότερον τοῦ ὑγροῦ ἐόν, ἔστω δὲ τὸ μὲν δεδυκὸς
 αὐτοῦ τὸ Α, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τὸ Φ. Δεικτέον ὅτι
 τὸ ΦΑ τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν τὸ ἰσογκον τοῦτον ἔχει
 10 τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ Α ποτὶ τὸ ΦΑ.

Λελάφθω γάρ τι τοῦ ὑγροῦ μέγεθος τὸ ΝΙ ἴσον ὄγκον
 ἔχον τῷ ΦΑ, καὶ τῷ μὲν Φ ἴσον ἔστω τὸ Ν, τῷ δὲ Α τὸ Ι,
 καὶ ἔτι τὸ μὲν τοῦ ΦΑ μέγεθος βάρος ἔστω τὸ Β, τοῦ
 δὲ ΝΙ τὸ ΡΟ, τοῦ δὲ Ι τὸ Ρ· τὸ ΦΑ ἄρα ποτὶ τὸ ΝΙ τοῦτον
 15 ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ Β ποτὶ τὸ ΡΟ. Ἄλλ' ἐπεὶ τὸ ΦΑ

Soit un segment de paraboloïde de révolution tel que nous venons de l'indiquer. Qu'il soit placé dans une position inclinée. Il faut démontrer qu'il ne restera pas dans cette position, mais qu'il se redressera droit.

Coupons donc ce segment par un plan passant par l'axe et perpendiculaire au plan de la surface du liquide ; que l'intersection de ce plan avec le segment soit la parabole $\Lambda\Pi O\Lambda$. Soit NO l'axe du segment et le diamètre de la (sc. parabole de) section, et $I\Sigma$ l'intersection (sc. du plan sécant) avec la surface du liquide¹. Puisque, dans ces conditions, le segment (sc. l'axe du segment) n'est pas vertical, la droite AA ne sera pas parallèle à la droite $I\Sigma$. Il s'ensuit que NO ne fait pas un angle droit avec $I\Sigma$. Menons donc à $I\Sigma$ la parallèle $K\Omega$, tangente à la section conique (sc. à la parabole d'intersection) au point Π , et du point Π menons la droite $\Pi\Phi$ parallèlement à NO . La droite $\Pi\Phi$ divise alors le segment de droite $I\Sigma$ en deux parties égales ; car cette propriété a été démontrée dans les recherches sur les coniques². Divisons le segment de droite $\Pi\Phi$ (sc. par un point B) de manière que ΠB soit double de $B\Phi$, et le segment de droite NO par le point P de manière que OP soit à son tour double de PN . Dès lors, le centre de gravité du plus grand segment du solide sera le point P , et celui du segment situé du côté de l'arc $\Pi\theta O\Sigma$ sera le point B ; car il a été démontré dans le traité *Des Équilibres* que dans tout segment de paraboloïde de révolution le centre de gravité est situé sur l'axe au point qui le divise de manière que le segment de l'axe du côté du sommet soit double du segment restant. Si on retranche donc le segment solide suivant l'arc $\Pi\theta O\Sigma$ du segment entier, le centre de gravité de la figure qui reste sera situé sur la droite $B\Gamma$; car il a été démontré dans les *Éléments de mécanique* que si d'une grandeur entière est retranchée une grandeur n'ayant pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur qui reste sera situé sur la droite

1-2. Cf. notes compl.

Ἐστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, οἶον εἴρηται, καὶ κείσθω κεκλιμένον. Δεικτέον ὅτι οὐ μενεῖ, ἀλλ' ἀποκαστασείται ὀρθόν.

- Τμαθέντος δὴ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ
 5 ποτὶ τὸ <ἐπίπεδον τὸ ἐπὶ τᾷ ἐπιφανείᾳ> τοῦ ὕγρου τμάματος ἔστω τομὰ ἅ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, ἄξων δὲ τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾷς τομᾷς ἅ ΝΟ, τᾷς δὲ τοῦ ὕγρου ἐπιφανείας τομὰ ἅ ΙΣ. Ἐπεὶ οὖν τὸ τμᾶμα οὐκ ἐστὶν ὀρθόν, οὐκ ἂν εἴη παράλληλος ἅ ΑΛ
 10 τᾷ ΙΣ · ὥστε οὐ ποιήσει ὀρθὰν γωνίαν ἅ ΝΟ ποτὶ τὰν ΙΣ. Ἄχθω οὖν παράλληλος ἅ ἐφαπτομένα ἅ ΚΩ τᾷς τοῦ κώνου τομᾷς κατὰ τὸ Π, καὶ ἀπὸ τοῦ Π παρὰ τὰν ΝΟ ἄχθω ἅ ΠΦ · τέμνει δὴ ἅ ΠΦ δίχα τὰν ΙΣ · δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς. Τετμάσθω ἅ ΠΦ, ὥστε εἶμεν διπλασίαν
 15 τὰν ΠΒ τᾷς ΒΦ, καὶ ἅ ΝΟ κατὰ τὸ Ρ τετμάσθω, ὥστε καὶ τὰν ΟΡ τᾷς ΡΝ διπλασίαν εἶμεν · ἐσσεῖται δὴ τοῦ μείζονος ἀποτμάματος τοῦ στερεοῦ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ρ, τοῦ δὲ κατὰ τὰν ΙΠΟΣ τὸ Β · δέδεικται γὰρ ἐν ταῖς ἰσοροπίαις, ὅτι παντὸς ὀρθογωνίου κωνοειδέος τμάματος τὸ κέντρον
 20 τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος διηρημένου οὕτως, ὥστε τὸ ποτὶ τᾷ κορυφῇ τοῦ ἄξονος τμᾶμα διπλάσιον εἶμεν τοῦ λοιποῦ. Ἀφαιρεθέντος δὴ τοῦ κατὰ τὰν ΙΠΟΣ τμάματος στερεοῦ ἀπὸ τοῦ ὅλου τοῦ λοιποῦ <τὸ> κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους ἐπὶ τᾷ ΒΓ εὐθείας · δέδεικται γὰρ
 25 τοῦτο ἐν τοῖς Στοιχείοις τῶν μηχα<νικῶν ὅτι, εἴ κα μέγεθος ἀφαιρεθῇ μὴ> τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τοῦ βάρους τῷ ὅλῳ μεγέθει, τοῦ λοιποῦ τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρους ἐπὶ

5 ἐπίπεδον τὸ ἐπὶ τᾷ ἐπιφανείᾳ rest. Heiberg : planum quod in superficie \mathcal{Z} || 6 ἅ \mathcal{Z} : om. C || 8 ΙΣ ms. C : k ms. \mathcal{Z} || 10 τᾷ \mathcal{Z} : τῆς C || ΝΟ ms. \mathcal{Z} : ΝΘ ms. C || 11 παράλληλος om. \mathcal{Z} || ἅ ἐφαπτομένα ἅ ΚΩ Heiberg : ἡ ἐφαπτομένη ΙΣΚΩ τῷ C quae kw contingens \mathcal{Z} || 16 τὰν om. C || ΡΝ Heiberg : ΡΗ ms. C || διπλασίαν Heiberg : διπλῆν C || 19 κωνοειδέος Heiberg : κώνου εἶδους C || 20 διηρημένου Heiberg : διηρήσθω C || 23 τὸ addidi.

joignant les centres de gravité de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, cette droite étant prolongée du côté où se trouve le centre de gravité de la grandeur entière¹. Prolongeons donc BP vers Γ , et soit Γ le centre de gravité de la grandeur qui reste. Du moment que NO est égal aux trois demis de OP et ne dépasse pas les trois demis du paramètre, il est évident que le segment de droite PO ne sera pas supérieur au paramètre. La droite ΠP fait donc avec la droite $K\Omega$ des angles inégaux, et l'angle $P\Pi\Omega$ est aigu, et par conséquent la perpendiculaire abaissée du point P sur la droite $\Pi\Omega$ tombera entre les points Π et Ω . Qu'elle tombe suivant la droite $P\Theta$; $P\Theta$ est donc perpendiculaire au plan, parallèle² à $K\Omega$, dans lequel se trouve la droite ΣI et qui est situé à la surface du liquide. Menons par les points B et Γ des parallèles à $P\Theta$. La partie de la grandeur qui émerge du liquide se déplacera donc vers le bas suivant la verticale qui passe par le point Γ , puisque nous supposons que tous les corps pesants se déplacent vers le bas suivant la verticale passant par leur centre de gravité³. D'autre part, la grandeur immergée dans le liquide, du moment qu'elle est plus légère⁴ que le liquide, se déplacera vers le haut suivant la verticale passant par B. Mais comme ces grandeurs ne se compriment pas l'une l'autre en des sens contraires suivant la même verticale, la figure ne restera pas en place, mais ses parties situées du côté de A iront vers le haut, alors que ses parties situées du côté de A iront vers le bas, et ceci continuera à se produire, jusqu'à ce que la figure se dresse droite.

3.

Si un segment droit de paraboloïde ■ son axe inférieur ou égal aux trois demis du paramètre, son poids pouvant

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.

2. Le texte présente ici une lacune d'un mot ou de deux mots ; Heiberg complète la phrase par le terme parallèle.

3-4. Cf. notes complémentaires.

- τῆς εὐθείας τῆς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ τε ὅλου
 μεγέθους καὶ τοῦ ἀφηρημένου ἐκβεβλημένας ἐπὶ τὰ αὐτά,
 ἐφ' ἃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθους ἐστίν. Ἐκβεβλήσθω
 δὴ ἡ ΒΡ ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἔστω τὸ Γ κέντρον τοῦ βάρος
 5 τοῦ λοιποῦ μεγέθους. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΝΟ τῆς μὲν ΟΡ ἡμιολία,
 τῆς δὲ μέχρι τοῦ ἄξονος οὐ μείζων ἢ ἡμιολία, δηλὸν
 ὅτι ἡ ΡΟ τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος οὐκ ἐστὶ μείζων · ἡ ΠΡ
 ἄρα ποτὶ τὴν ΚΩ γωνίας ἀνίσους ποιεῖ, καὶ ἡ ὑπὸ τῶν
 ΡΠΩ γίνεται ὀξεῖα · ἡ ἀπὸ τοῦ Ρ ἄρα κάθετος ἐπὶ τὴν
 10 ΠΩ ἀγομῆνα μεταξὺ πεσεῖται τῶν Π, Ω. Πιπτέτω ὡς ἡ
 ΡΘ · ἡ ΡΘ ἄρα ὀρθά ἐστίν ποτὶ τὸ.....κ..ος ἐπίπεδον,
 ἐν ᾧ ἐστίν ἡ ΣΙ, ὅ ἐστιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕγρου.
 Ἄχθωσαν δὴ τινες ἀπὸ τῶν Β, Γ παρὰ τὴν ΡΘ · ἐνεχθήσεται
 δὴ τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὕγρου τοῦ μεγέθους εἰς τὸ κάτω κατὰ
 15 τὴν διὰ τοῦ Γ ἀγομῆναν κάθετον · ὑπόκειται γὰρ ἕκαστον
 τῶν βαρέων εἰς τὸ κάτω φέρεσθαι κατὰ τὴν κάθετον τὴν
 διὰ τοῦ κέντρου ἀγομῆναν · τὸ δὲ ἐν τῷ ὕγρῳ μέγεθος,
 ἐπεὶ κουφότερον γίνεται τοῦ ὕγρου, ἐνεχθήσεται εἰς τὸ
 ἄνω κατὰ τὴν κάθετον τὴν διὰ τοῦ Β ἀγομῆναν. Ἐπεὶ
 20 δὲ οὐ κατὰ τὴν αὐτὴν κάθετον ἀλλάλοις ἀντιθλίβονται,
 (οὐ μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὰ μὲν κατὰ) τὸ Α εἰς τὸ ἄνω
 ἐνεχθήσεται, τὰ δὲ κατὰ τὸ Λ εἰς τὸ κάτω, καὶ τοῦτο αἰεὶ
 ἐσσεῖται, ἕως ἂν ὀρθὸν ἀποκατασταθῇ.

Υ'.

- 25 Ὅρθον τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν τὸν ἄξονα
 ἔχη μὴ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος, πάντα

2 ἐκβεβλημένας add. Heiberg || 3 ἃ Heiberg : οὗ C || 4 κέντρον om.
 C || 6 μείζων ἢ Heiberg : μείζον εἰ C || 9 ὀξεῖα Heiberg : ὀξεῖ
 C || 12 ἐπὶ Heiberg : ἢ ἐπὶ C || 18 ἐπεὶ Heiberg : ἐπὶ C || 19-20
 ἐπεὶ δὲ οὐ Heiberg : ἐπιπέδου C || 20 ἀλλάλοις Heiberg : ἀλλὰ
 οἱ λη. ω ms. C || 21 οὐ — κατὰ rest. Heiberg || 22 καὶ τοῦτο
 add. Heiberg || 23 ἐσσεῖται Heiberg : ἔστε C || 26 μὴ C : om. Z
 || ἢ Z : om. C || τοῦ ἄξονος Z : τοὺς ἄξονας C.

λόγον ἔχον ποτὶ τὸ ὑγρὸν τῷ βάρει, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν
οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ,
τεθὲν κεκλιμένον οὐ μενεῖ κεκλιμένον, ἀλλ' ἀποκατα-
τασεῖται οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ κατὰ κάθετον
5 εἶμεν.

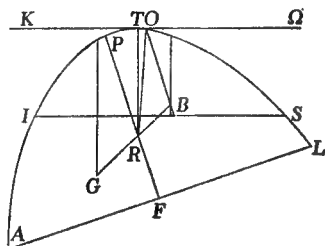


Fig. 96

Ἀφείσθω γάρ τι τμήμα εἰς τὸ ὑγρόν, οἷον εἴρηται, καὶ ἕστω αὐτοῦ ἡ βάσις ἐν τῷ ὑγρῷ, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἕστω ἡ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, 10 ἄξων δὲ τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς τομᾶς ἡ ΠΦ, τῆς δὲ ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἡ ΙΣ. Ἐπειδὴ οὖν κεκλιμένον κεῖται τὸ τμήμα, οὐκ ἑσσεῖται κατὰ κάθετον ὁ ἄξων· οὐκ ἄρα ποιήσῃ ἡ ΠΦ ἴσας γωνίας ποτὶ τὰν ΙΣ. Ἄχθω δὴ τις (ἡ ΚΩ παρὰ τὰν ΙΣ ἐφαπτομένα κατὰ) 15 τὸ Ο τῆς ΑΠΟΛ τομᾶς, καὶ τοῦ μὲν ΑΠΟΛ στερεοῦ κέντρον ἕστω τοῦ βάρους τὸ Ρ, τοῦ δὲ ΙΠΟΣ στερεοῦ τὸ Β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΡ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἕστω κέντρον τοῦ βάρους τὸ Γ τοῦ ΙΣΛΑ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἡ μὲν ὑπὸ τῶν ΡΟ, ΟΚ γωνία ὀξεῖα, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Ρ κάθετος

7 βάσις \mathcal{L} : βάσει C || αὐτοῦ alt. C : om. \mathcal{L} || 14 ἄ — κατὰ
rest. Heiberg : quae kw aequedistanter ipsi is contigens \mathcal{L} || 15
τοῦ μὲν \mathcal{L} : τομῇ C || κέντρον \mathcal{L} : om. C || 17 ἄ \mathcal{L} : δὴ C || 19
γωνία \mathcal{L} : γωνίαν C.

point P sur $K\Omega$ tombera entre les points K et O ; soit $P\Theta$ cette perpendiculaire. Dès lors, si des points Γ et B on mène des parallèles à $P\Theta$, la partie (sc. du segment) immergée dans le liquide se déplacera vers le haut¹ suivant la parallèle menée par Γ et la partie qui émerge du liquide ira vers le bas suivant la parallèle menée par B , et le solide $\Lambda\Pi O\Lambda$ ne gardera pas sa position dans le liquide, mais sa partie du côté de A sera emportée vers le haut, sa partie du côté de Λ le sera vers le bas, et cela jusqu'à ce que $\Pi\Phi$ soit dans la verticale.

4.

Si un segment droit de parabololoïde, plus léger que le liquide (sc. de même volume), a un axe supérieur aux trois demis du paramètre, si le rapport de son poids au poids du même volume du liquide n'est pas inférieur au rapport du carré sur la différence entre l'axe et les trois demis du paramètre au carré sur l'axe, ce segment, abandonné dans le liquide dans une position inclinée et de manière que sa base ne touche pas le liquide, ne restera pas incliné, mais se redressera droit.

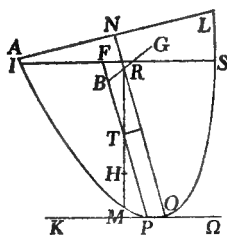


Fig. 97

1. Cf. prop. I, 7, fin.

Soit un segment de paraboloïde tel que nous venons de l'indiquer ; que, mis dans le liquide, il occupe, si possible, une position non droite, mais inclinée ; que son intersection avec un plan passant par l'axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit le segment de parabole¹ APOL ; soit NO l'axe du segment et le diamètre de la parabole, IS la trace du plan sécant dans la surface du liquide. Si donc le segment n'est pas en position droite, NO ne fera pas des angles égaux² avec IS. Menons la tangente KΩ à la parabole au point P parallèlement à IS, et menons par P la parallèle PF à ON ; prenons les centres de gravité, soit R pour le solide APOL, soit B pour la partie immergée dans le liquide, menons BR et prolongeons BR jusqu'au point G, qui soit le centre de gravité³ (sc. de la partie) du solide émergeant du liquide. Comme NO est égal³ aux trois demis de RO et supérieur aux trois demis du paramètre, il est évident que RO est supérieur au paramètre. Soit donc RM égal au paramètre, et OM double de HM. Du moment donc que NO est égal aux trois demis de RO, et HO égal aux trois demis de OM, le segment restant NH est à son tour égal⁴ aux trois demis du segment restant RM ; il s'ensuit que l'axe dépasse les trois demis du paramètre⁵, égal à RM, du segment de droite HO. Comme on a supposé que

1. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 11.

2. Cf. prop. II, 2.

3. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.

4. On a en effet : $NH = NO - HO = \frac{3}{2} PO - \frac{3}{2} OM = \frac{3}{2} (PO - OM) = \frac{3}{2} PM.$

5. On a : $NO = NH + HO = \frac{3}{2} PM + HO.$

"Ἐστω τμήμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, οἶον εἴρηται, καὶ ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, εἰ δυνατόν, ἔστω μὴ ὀρθόν, ἀλλὰ κεκλιμένον, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τοῦ μὲν τμήματος

5 τομὰ

sit rectanguli coni sectio quae APOL,
axis autem portionis et diameter <sectionis>
quae NO, superficiei autem humidi sectio sit IS.
Si igitur portio non est recta, non faciet quae NO
10 ad IS angulos aequales.

Ducatur autem quae KΩ contingens sectionem
rectanguli coni penes P, aequedistans autem ipsi IS,
■ P autem aequedistanter ipsi ON ducatur quae PF,
et accipiantur centra gravitatum, et erit solidi
15 quidem APOL centrum R, eius autem, quod intra
humidum, centrum B, et copuletur quae BR et
educatur ad G, et sit solidi, quod supra humidum,
centrum gravitatis G. Et quoniam quae NO ipsius
quidem RO est emiolia, eius autem, quae usque ad
20 axem, est maior quam emiolia, palam quod quae RO
est maior quam quae usque ad axem. Sit igitur
quae RM aequalis ei, quae usque ad axem, quae
autem OM dupla ipsius HM. Quoniam igitur fit
quae quidem NO ipsius RO emiolia, quae autem HO
25 ipsius OM, et reliqua quae NH reliquae, scilicet RM,
emiolia est ; ipsi HO igitur maior quam emiolius
est axis eius, quae usque ad axem, scilicet RM.
Et quoniam supponebatur portio ad humidum in

1 τμήμα ὀρθογωνίου C : portio rectangula ζ || 7 sectionis
Comm. : om. ζ || 16 BR Comm. : tr ms. ζ || 23 OM Heiberg :
on ms. ζ || HM Comm. : rm ms. ζ || 24 HO Heiberg : mo ms.
ζ || 25 OM Heiberg : oh ms. ζ || NH Heiberg : nm ms. ζ ||
RM Heiberg : rh ms. ζ || 26 HO Heiberg : mo ms. ζ || igitur
Heiberg : est ms. ζ.

le rapport entre le poids du segment de paraboloïde et le poids (sc. du même volume) du liquide n'est pas inférieur au rapport du carré sur la différence entre l'axe et les trois demis du paramètre, d'une part, et le carré sur l'axe, d'autre part, il est évident que le rapport du poids du segment au poids du (sc. même volume) du liquide n'est pas inférieur au rapport du carré sur HO au carré sur NO. Or le rapport du poids du segment au poids du liquide est égal au rapport de la partie immergée du segment au segment solide entier, comme cela a été démontré¹; mais le rapport de la partie immergée au solide entier est égal au rapport du carré sur PF au carré sur NO; car on a démontré dans le Traité des conoïdes que si d'un paraboloïde de révolution deux segments sont découpés par des plans menés de n'importe quelle manière, les segments ont entre eux le même rapport que les carrés sur leurs axes². Par conséquent, le rapport du carré sur PF au carré sur NO ne sera pas inférieur au rapport du carré sur HO au carré sur NO; il s'ensuit que PF n'est pas inférieur³ à HO, ni BP inférieur⁴ à MO; si donc on mène de M la perpendiculaire à NO, elle tombera entre B et P. Puisque, par conséquent, PF est parallèle au diamètre, MT perpendiculaire au diamètre, et RM égal au paramètre, le prolongement de la droite joignant R à T fera des angles droits avec la tangente au point P; elle fera donc aussi des angles égaux⁵ avec IS et avec la surface du liquide passant

1. Cf. prop. II, 1.

2. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.

3. Cf. Eucl. V, 7 et 8.

4. Cf. prop. II, 2.

5. Cf. Eucl. I, 29; IS est en effet parallèle à KΩ.

gravitate non minorem proportionem habens illa,
 quam habet tetragonum, quod ab excessu, quo axis
 est maior quam emiolius eius, quae usque ad axem,
 ad tetragonum quod ab axe, palam quod non
 5 minorem proportionem habet portio ad humidum
 in gravitate illa proportionem, quam habet tetragonum
 quod ab HO ad id quod ab NO, quam autem
 proportionem habet portio ad humidum in gravitate,
 hanc habet demersa ipsius portio ad totam solidam
 10 portionem ; demonstratum est enim hoc ; sed quam
 habet proportionem demersa portio ad totam, hanc
 habet tetragonum quod a PF ad tetragonum quod
 ab NO ; demonstratum est enim in his, quae de
 conoidalibus, quod, si ■ rectangulo conoidali duae
 15 portiones qualitercumque productis planis abscin-
 dantur, portiones adinvicem eandem habebunt
 proportionem quam tetragona quae ab axibus
 ipsorum. Non minorem ergo proportionem habet
 tetragonum quod a PF ad tetragonum quod ab NO
 20 quam tetragonum quod ab HO ad tetragonum quod
 ab NO ; quare quae PF non est minor quam HO,
 neque quae BP quam MO ; si igitur ab M ipsi NO
 recta ducatur, cadet inter B et P. Quoniam igitur
 quae quidem PF est aequidistanter diametro, quae
 25 autem MT est perpendicularis ad diametrum, et
 quae RM aequalis ei quae usque ad axem, ab R
 ad T copulata et educta faciet angulos rectos ad
 contingentem secundum P ; quare et ad IS et ad
 eam quae per IS superficiem humidi faciet aequales

7 HO Heiberg : mo ms. ζ || 12 a PF ad tetragonum quod
 rest. Comm. : lac. ζ || 20 HO Heiberg : mo ms. ζ || 21 HO Heiberg :
 mo ms. ζ || 22 MO Heiberg : no ms. ζ || 25 MT Heiberg : nt
 ms. ζ.

par IS. Mais si par B et G on mène des parallèles à RT, elles feront des angles droits avec la surface du liquide, et ainsi la partie du segment solide du paraboloïde, immergée dans le liquide, se déplacera vers le haut suivant la parallèle à RT menée par B, alors que la partie découpée en dehors du liquide ira vers le bas, dans le liquide suivant la parallèle à RT menée par G, et cela continuera à se produire jusqu'à ce que le (sc. segment de) paraboloïde ait pris la position droite.

5.

Si un segment droit de paraboloïde de révolution, plus léger que le liquide (sc. de même volume), a un axe supérieur aux trois demis du paramètre, et si le rapport de son poids au poids du même volume du liquide n'est pas supérieur au rapport de l'excès du carré de l'axe sur le carré de la différence entre l'axe et les trois demis du paramètre au carré de l'axe¹, ce segment, abandonné dans le liquide, de manière que sa base soit entièrement dans le liquide, et placé dans une position inclinée, ne restera pas dans cette position, mais se redressera de manière que son axe soit dans la verticale.

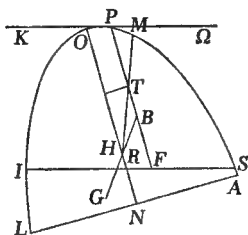


Fig. 98

1. En désignant le paramètre par p , ces conditions, différentes de celles de la proposition précédente, s'écrivent :

$$NO > \frac{3}{2} p ; \frac{\text{poids du segment}}{\text{poids du même vol. de liqu.}} < \frac{NO^2 - (NO - \frac{3p}{2})^2}{NO^2}.$$

angulos. Si autem per B, G ipsi RT aequedistantes
ducantur, anguli recti erunt facti ad superficiem
humidi, et quod quidem in humido absumitur
solidum conoidalis, sursum feretur secundum eam
5 quae per B aequedistantem ipsi RT, quod autem
extra humidum absumptum deorsum feretur in
humidum secundum productam per G aequedis-
tantem ipsi RT, et per totum idem erit, donec utique
conoidale rectum restitatur.

10

V.

Recta portio rectanguli conoidalis, quando levior
existens humido habuerit axem maiorem quam
emiolum eius quae usque ad axem, si ad humidum
in gravitate non maiorem proportionem habeat illa,
15 quam habet excessus, quo maius est tetragonum
quod ab axe tetragono quod ab excessu, quo axis
est maior quam emiolum eius quae usque ad axem,
ad tetragonum quod ab axe, dimissa in humidum
Ita, ut basis ipsius tota sit in humido, posita inclinata
20 non manet inclinata, sed restituetur ita, ut axis
ipsius secundum perpendicularem sit.

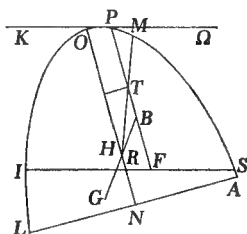


Fig. 98

Abandonnons, en effet, dans le liquide un segment tel que nous venons de l'indiquer, sa base entièrement dans le liquide ; son intersection avec un plan passant par l'axe et perpendiculaire à la surface du liquide sera une parabole, soit APOL ; soit NO l'axe du segment et le diamètre de la parabole d'intersection, et IS la trace du plan sécant dans la surface du liquide. Comme l'axe n'est pas dans la verticale, NO ne fera pas des angles égaux avec IS. Menons la droite KΩ, tangente à la parabole APOL au point P et parallèle à IS, et menons par P la parallèle PF à NO ; prenons les centres de gravité, soit R le centre de la parabole APOL, B le centre de la partie qui émerge du liquide ; menons la droite BR et prolongeons-la jusqu'au point G ; soit G le centre de gravité de la partie du solide immergée dans le liquide¹ ; prenons RM égal au paramètre et OM double de HM, et disposons du reste comme précédemment². Du moment donc que, par hypothèse, le rapport du poids du segment au poids du liquide (sc. de même volume) n'est pas supérieur au rapport de l'excès du carré de NO sur le carré de HO au carré sur NO, et que, d'autre part, le rapport du poids du segment au poids du même volume du liquide est égal au rapport de la partie immergée du segment au solide entier (comme cela a été démontré dans le premier théorème), le rapport de la grandeur immergée au segment entier n'est pas supérieur au rapport indiqué ; il s'ensuit que le rapport du segment entier à sa partie émergeant du liquide n'est pas supérieur³ au rapport du carré

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.

2. Cf. prop. II, 4.

$$\begin{aligned}
 & 3. \text{ On a en effet : } \frac{\text{segm. immergé}}{\text{segm. entier}} = \frac{\text{poids du segm.}}{\text{poids du même v. du liqu.}} \\
 & \leq \frac{\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2}{\overline{NO}^2} ; \text{ d'où } \frac{\text{segm. entier}}{\text{segm. immergé}} \geq \frac{\overline{NO}^2}{\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2} ; \text{ d'où } \\
 & \frac{\text{segm. entier}}{\text{segm. entier} - \text{segm. imm.}} = \frac{\text{segm. entier}}{\text{segm. émergé}} \\
 & \leq \frac{\overline{NO}^2}{\overline{NO}^2 - (\overline{NO}^2 - \overline{HO}^2)} = \frac{\overline{NO}^2}{\overline{HO}^2}.
 \end{aligned}$$

Dimittatur enim in humidum aliqua portio, qualis
 dicta est, et sit basis ipsius tota in humido, secta
 autem ipsa plano per axem recto ad superficiem
 humidi erit sectio rectanguli coni sectio, et sit quae
 5 APOL, axis autem \langle portionis \rangle et diameter sectionis
 quae NO, superficiei autem humidi sectio quae IS.
 Et quoniam non est axis secundum perpendicularem,
 non faciet quae NO ad IS angulos aequales. Ducatur
 autem quae KΩ contingens sectionem APOL secundum
 10 P aequedistans ipsi IS et per P ipsi NO aequedistans
 quae PF, et accipiantur centra gravitatum, et sit
 ipsius quidem APOL centrum R, eius autem quod
 extra humidum B, et copulata quae BR educatur
 ad G, et sit G centrum gravitatis solidi absumpti
 15 in humido, et accipiat quae RM aequalis ei quae
 usque ad axem, quae autem OM dupla ipsius HM,
 et alia fiant consimiliter superiori. Quoniam igitur
 supponitur portio ad humidum in gravitate non
 maiorem proportionem habens proportionem, quam
 20 habet excessus, quo maius est tetragonum quod
 ab NO tetragono quod ab HO, ad tetragonum quod
 ab NO, sed quam proportionem habet in gravitate
 portio ad humidum aequalis molis, hanc propor-
 tionem habet demersa ipsius portio ad totum solidum
 25 (demonstratum est enim hoc in primo theoremate),
 non maiorem ergo proportionem habet demersa
 magnitudo portionis ad totam portionem, quam sit
 dicta proportio ; quare non maiorem proportionem
 habet tota portio ad eam quae extra humidum
 30 portionem, quam habet tetragonum quod ab NO

5 portionis add. Comm. || 16 OM Heiberg : oh ms. ζ || 21
 HO Heiberg : mo ms. ζ || 30 portione m Heiberg : proportio-
 nem ζ.

sur NO au carré sur HO. Or le rapport du segment entier à la partie émergeant du liquide est égal¹ au rapport du carré sur NO au carré sur PF ; le rapport du carré sur NO au carré sur PF n'est donc pas supérieur au rapport du carré sur NO au carré sur HO. Par conséquent, PF n'est pas inférieur à OH ; il s'ensuit que PB non plus n'est pas inférieur² à MO. Dès lors, la perpendiculaire abaissée de M sur RO rencontrera BP entre les points P et B ; soit T le point de rencontre. Et comme, dans la parabole, PF est parallèle au diamètre RO, MT perpendiculaire au diamètre, et RM égal au paramètre, il est évident que le prolongement de la droite RT fait des angles droits avec la droite KPΩ ; il fait donc des angles droits aussi avec la droite IS. Par conséquent, RT est perpendiculaire à la surface du liquide, et, de même, les parallèles à RT menées par les points B et G seront perpendiculaires à la surface du liquide ; il s'ensuit que la partie du segment qui émerge du liquide se déplacera vers le bas, dans le liquide, suivant la verticale passant par B, alors que la partie immergée ira vers le haut suivant la verticale passant par G, et le segment solide APOL ne restera pas immobile, mais sera mu dans le liquide, jusqu'à ce que la droite NO soit placée suivant la verticale.

6.

Si un segment droit de parabolioïde, plus léger que le liquide (sc. de même volume), a un axe supérieur aux trois demis du paramètre, mais trop petit pour

1. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.

2. Puisque $BP = \frac{2}{3}PF$, et $MO = \frac{2}{3}HO$.

ad tetragonum quod ab HO. Habet autem tota portio
ad portionem quae extra humidum eandem propor-
tionem, quam habet tetragonum quod ab NO ad id
quod a PF ; non maiorem ergo proportionem habet
5 quod ab NO ad id quod a PF, quam quod ab NO ad
id quod ab HO. Non minor ergo fit quae PF quam
quae OH ; quare nec quae PB quam MO. Quae ergo
ab M producitur ipsi RO ad rectos angulos, concidet
ipsi BP inter P et B ; concidat secundum T. Et quoniam
10 in rectanguli coni sectione quae PF est aequedistanter
diametro RO, quae autem MT perpendicularis super
diametrum, quae autem RM aequalis ei quae usque
ad axem, palam quod quae RTeducta facit angulos
rectos ad KPΩ ; quare et ad IS. Quae ergo RT est
15 perpendicularis ad superficiem humidi, et per signa B,
G aequedistanter ipsi RT productae erunt perpen-
diculares ad superficiem humidi ; quae quidem
igitur extra humidum portio deorsum feretur in
humidum secundum productam per B perpendi-
20 cularem, quae autem intra humidum sursum feretur
secundum perpendicularem quae per G, et non
manet solida portio APOL, sed intra humidum erit
motum, donec utique quae NO fiat secundum
perpendicularem.

25

VI.

Recta portio rectanguli conoidalis, quando humido
leuior existens axem habuerit maiorem quidem
quam hemiolium, minorem autem quam ut hanc

1 HO Heiberg : mt ms. ζ || 6 HO Heiberg : mo ms. ζ || 7
OH add. Heiberg || MO Heiberg : n o ms. ζ || 8 ad rectos angu-
los Comm. : equedistans ζ || 23 motum rest. Comm. || 28 quam
Tart. : om. ζ.

que son rapport au paramètre soit égal au rapport de quinze à quatre, ce segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base touche le liquide, ne restera jamais incliné de manière que sa base touche le liquide en un seul point.

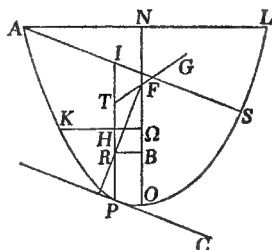


Fig. 99

Soit un segment tel que nous venons de l'indiquer ; que, abandonné dans le liquide, il prenne la position désignée ci-dessus, c'est à dire telle que sa base touche le liquide en un seul point ; que son intersection avec un plan passant par l'axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole¹ APOL ; soit AS la trace de ce plan dans la surface du liquide, et NO l'axe du segment et le diamètre de la parabole ; que NO soit divisé, par le point F de manière que OF soit double de FN, par le point Ω de manière que NO soit à F Ω comme quinze est à quatre ; élevons en Ω la perpendiculaire ΩK à NO. Le rapport de NO à F Ω est ainsi supérieur au rapport de NO au paramètre. Soit FB égal à l'axe ; menons parallèlement à AS la droite PC, tangente à la parabole APOL au point P, et la droite PI

1. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 16.

parallèle à NO. Que PI coupe, d'abord, KΩ. Du moment donc que, dans le segment APOL compris entre une droite et une parabole, KH est parallèle à AL, la parallèle au diamètre PI coupée par KΩ, et AS parallèle à la tangente en P, nécessairement le rapport de PI à PH est supérieur ou égal au rapport de NΩ à ΩO, comme cela a été démontré dans les lemmes¹. Or ΩN est égal² aux trois demis de ΩO ; il s'ensuit que IP est supérieur ou égal³ au double de HI. Soit PT double de TI ; le point T est donc le centre de gravité⁴ de la partie immergée dans le liquide. Joignons T à F et prolongeons la droite TF ; soit G le centre de gravité⁵ de la partie qui émerge du liquide ; élevons en B la perpendiculaire BR à NO. Du moment, dès lors, que PI est parallèle au diamètre NO, BR perpendiculaire au diamètre, et FB égal au paramètre, il est évident que le prolongement de FR fait des angles égaux avec la tangente à la parabole APOL au point P ; il fait donc des angles égaux aussi avec AS et avec la surface de l'eau. Mais les parallèles à FR menées par les points T et G seront elles aussi perpendiculaires à la surface de l'eau, et la grandeur découpée du solide APOL dans le liquide ira vers le haut suivant la perpendiculaire passant par T, alors que la grandeur qui émerge du liquide descendra dans le liquide suivant la perpendiculaire passant par G. Le solide APOL tournera donc, et

1. Probablement un recueil de lemmes, perdu aujourd'hui, qui faisait suite au traité *Des corps flottants*. La démonstration de la relation $\frac{PI}{PH} \geq \frac{N\Omega}{\Omega O}$ a été reconstituée une première fois par Commandin, suivi, entre autres, par Nizze et Ver Eecke ; cf. *Introduction*, t. I.

2. Cf. notes complémentaires.

3. Puisque $\frac{PI}{PH} \geq \frac{N\Omega}{\Omega O} = \frac{3}{2}$, on a $HI = PI - PH \geq \frac{1}{2} PH$, d'où : $PH \leq 2HI$.

4. Cf. prop. II, 2.

5. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.

- distanter ipsi NO ; secet autem quae PI prius ipsam KΩ. Quoniam igitur in portione APOL contenta a recta et a sectione rectanguli coni quae quidem KH aequedistanter ipsi AL, quae autem PI aequedistanter
- 5 diametro secta ipsa KΩ, quae autem AS aequedistanter contingenti secundum P, necessarium est ipsam PI aut eandem proportionem habere ad PH, quam habet quae NΩ ad ΩO, aut maiorem proportionem ; demonstratum est enim hoc per sumpta.
- 10 Quae autem ΩN est emiolia ipsius ΩO ; et quae IP ergo aut emiolia est ipsius HP aut maior quam emiolia ; quae ergo PH ipsius HI aut dupla est aut minor quam dupla. Sit autem quae PT ipsius TI dupla ; centrum ergo gravitatis eius quod in humido
- 15 est signum T. Et copulata quae TF educatur, et sit centrum gravitatis eius quod extra humidum G, et a B ipsi NO recta quae BR. Quoniam igitur est quae quidem PI aequedistanter diametro NO, quae autem BR perpendicularis super diametrum, quae
- 20 autem FB aequalis ei quae usque ad axem, palam quod quae FR educta aequales facit angulos ad contingentem sectionem APOL secundum P ; quare et ad AS et ad superficiem aquae. Ductis autem per T, G aequedistanter ipsi FR erunt et ipsae
- 25 perpendiculares ad superficiem aquae, et magnitudo quidem intra humidum absumpta ex solido APOL sursum feretur secundum eam quae per T perpendicularem, quae autem extra humidum deorsum feretur in humidum secundum eam quae per G
- 30 perpendicularem. Reuoluetur ergo solidum APOL,

8 aut add. Heiberg : uel Comm. || 10 ΩN Comm. : ω h ms. ℥
 || IP Heiberg : ih ms. ℥ || 21 FR Heiberg : τr ms. ℥ || 30 reuoluetur Heiberg : ἀνακλιθήσεται ℥.

sa base ne touchera pas la surface du liquide en un point.

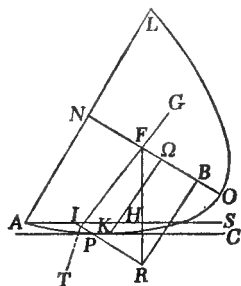


Fig. 100

Mais si PI ne coupe pas la droite KQ comme le montre la seconde figure, il est clair que le point T , centre de gravité de la partie immergée du segment, tombera entre les points P et I , et le reste de la démonstration se fera de la même manière.

7.

Si un segment droit de paraboloïde, plus léger que le liquide (sc. de même volume), a un axe supérieur aux trois demis du paramètre, mais trop petit pour que son rapport au paramètre soit égal au rapport de quinze à quatre, ce segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base soit entièrement dans le liquide,

et basis ipsius non tanget superficiem humidi secundum unum signum.

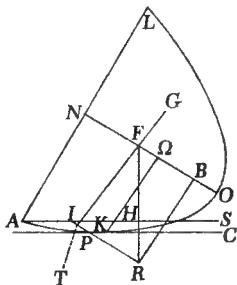


Fig. 100

Si autem quae Pl non secuerit lineam KΩ, sicut in secunda figura descriptum est, manifestum quod
 5 signum T, quod est centrum gravitatis demersae portionis, cadet inter P et I, et reliqua similiter demonstrabuntur.

ζ'.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν
 10 τοῦ ὑγροῦ κουφότερον ἢ καὶ τὸν ἄξονα ἔχη μείζονα μὲν ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε λόγον ἔχειν ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος, ὃν τὰ ιε ποτὶ δ, ἀφεθέν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως ὥστε τὰν βάσιν ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, οὐδέποτε καταστασεῖται οὕτως, ὥστε τὰν

4 secunda Comm. : solida ζ' || 10 τοῦ ὑγροῦ ζ' : τὸ ὑγρὸν C || 11 μὲν ζ' : ἦν C || ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος om. C || ἢ om. ζ' || 12 ὃν ζ' : ἢ ἡμιόλιον τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος ὃν C || ιε ζ' : ρε C || 13 δ ζ' : δα C || βάσιν C : basis ipsius ζ'.

ne prendra jamais une position telle que sa base touche la surface du liquide, mais telle qu'il soit entièrement dans le liquide et n'en touche la surface en aucun point.

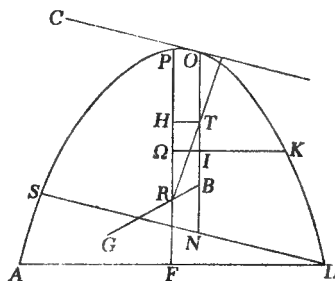


Fig. 101

Soit un segment tel qu'il vient d'être indiqué ; que, abandonné dans le liquide comme il a été dit, il prenne une position telle que sa base touche la surface du liquide. Il faut démontrer qu'il ne restera pas ainsi, mais tournera de façon que sa base ne touche en aucun point la surface du liquide.

Que son intersection avec un plan (sc. passant par son axe et)¹ perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole² $\Lambda\Pi O\Lambda$; soit $\Sigma\Lambda$ la trace du plan sécant dans la surface du liquide, et $\Pi\Phi$ l'axe du segment et le diamètre (sc. de la parabole) ; divisions $\Pi\Phi$ par le point P de manière que $P\Pi$ soit double de $P\Phi$, et par le point Ω de manière que $\Pi\Phi$ soit à $P\Omega$ comme quinze est à quatre, et menons la perpendiculaire ΩK à $\Pi\Phi$; $P\Omega$ sera ainsi inférieur au paramètre³. Découpons (sur $\Pi\Phi$) le segment PH égal au paramètre, et menons parallèlement à $\Sigma\Lambda$ la droite TO , tangente à la parabole au point O , et la droite NO parallèlement

1. Ces mots manquent dans le texte.

2. Cf. *Sur les con. et les sphér.* 11.

3. Cf. prop. 6.

à $\Pi\Phi$; que NO coupe, d'abord, $K\Omega$ au point I . On montrera comme précédemment¹ que NO est supérieur ou égal à OI ; dès lors OI sera inférieur² au double de IN . Soit donc OB double de BN , et prenons les mêmes

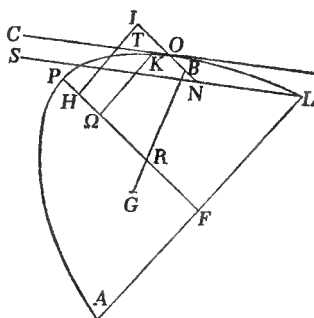


Fig. 102

dispositions ; on montrera ainsi de la même manière que $P\Theta$ fait des angles droits avec TO et avec la surface du liquide, et que des droites menées par B et Γ parallèlement à $P\Theta$ seront perpendiculaires à la surface du liquide. La partie du segment émergeant du liquide descendra donc dans le liquide suivant la verticale passant par B , et la partie immergée montera suivant la verticale passant par Γ ; il est dès lors évident que le solide tournera de façon que sa base ne touche en aucun point la surface du liquide, puisque, s'il la touche comme maintenant, il descend au fond du côté du point A .

Il est évident qu'on démontrera la même proposition aussi dans le cas où ON ne coupe pas ΩK .

1. Cf. prop. 6.

2. OI pouvant aussi être égal à $2IN$, il y a peut-être une lacune dans le texte ; cf. plus haut, pour les mots « passant par son axe ».

τὰν ΚΩ πρότερον κατὰ τὸ Ι. Ὅμοιως δὴ τῷ πρὸ τούτου
 δειχθήσεται ὅτι ἡ ΝΟ ἤτοι ἡμιολία τῆς ΟΙ ἢ μείζων ἢ
 ἡμιολία· γίνεται δὴ ἡ ΟΙ τῆς ΙΝ ἐλάσσων ἢ διπλασία.
 Ἐστω δὴ ἡ ΟΒ διπλασία τῆς ΒΝ, καὶ κατεσκευάσθω τὰ

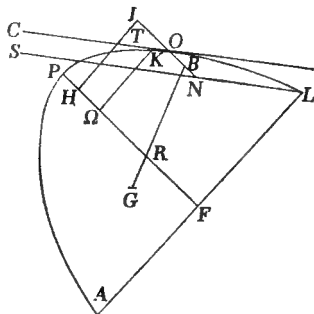


Fig. 102

- 5 αὐτὰ· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ἡ ΡΘ ὀρθὰς γωνίας ποιοῦσα
 πρὸς τὰν ΤΟ καὶ πρὸς τὰν τοῦ ὕγρου ἐπιφάνειαν, καὶ ἀπὸ
 τῶν Β, Γ ἀχθεῖσαι παρὰ τὰν ΡΘ κάθετοι ἐσσοῦνται ἐπὶ
 τὰν τοῦ ὕγρου ἐπιφάνειαν. Κατενεχθήσεται οὖν τὸ μὲν
 ἐκτὸς τοῦ ὕγρου τμήμα εἰς τὸ ὑγρὸν κατὰ τὰν διὰ τοῦ Β
 10 κάθετον, τὸ δ' ἐν τῷ ὑγρῷ ἀνενεχθήσεται κατὰ τὰν διὰ
 τοῦ Γ· φανερόν οὖν ὅτι ἐπικλιθήσεται τὸ στερεόν, ὥστε
 τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἐν ἄπτεσθαι τῆς τοῦ ὕγρου
 ἐπιφανείας, ἐπειδὴ νῦν καθ' ἐν σημείον (ἀπτόμενον ἐπὶ
 τὸ κάτω φέρεται) ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Λ.
 15 Φανερόν δὲ ὅτι, καὶ ἡ ΟΝ μὴ τέμνῃ τὰν ΩΚ, ταῦτα
 δειχθήσεται.

2 μείζων \mathcal{Z} : μείζων C || ἢ om. C || 4 Ἐστω δὴ ἡ ΟΒ διπλασία
 om. C : sit igitur quae ob dupla \mathcal{Z} || 5 ΡΘ ms. C : rf \mathcal{Z} || 7 ἀχθεῖσαι
 \mathcal{Z} : ἀχθεῖσαν C || 10-11 διὰ τοῦ om. C || 13 σημείον om. \mathcal{Z} || 13-
 14 ἀπτόμενον ἐπὶ τὸ κάτω φέρεται Heiberg : tangens ad deorsum
 fertur \mathcal{Z} || 14 Λ Comm. : A mss. \mathcal{Z} C || 15 ταῦτα \mathcal{Z} : ταῦτα C.

8.

Si un segment droit de paraboloïde a un axe supérieur aux trois demis du paramètre, mais trop petit pour que son rapport au paramètre soit égal au rapport de quinze à quatre, et si le rapport de son poids à celui du liquide (sc. de même volume) est inférieur au rapport entre le carré de l'excès de l'axe sur les trois demis du paramètre, d'une part, et le carré de l'axe, d'autre part, ce segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche pas le liquide, ne se redressera pas droit et ne restera pas incliné, à moins que son axe ne fasse avec la surface du liquide un angle égal à celui que nous aurons à indiquer.

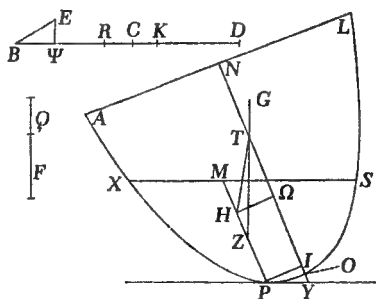


Fig. 103

Soit un segment tel qu'il vient d'être indiqué, un segment $B\Delta$ égal à l'axe, sur lequel BK soit double de $K\Delta$, et KP égal au paramètre; soit de plus, un segment de droite TB égal aux trois demis de BP et un segment $T\Delta$ égal aux trois demis de KP ; que

η'.

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν
τὸν ἄξονα ἔχη μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος,
ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος τοῦτον
5 ἔχειν τὸν λόγον ὃν ἔχει τὰ $\overline{\iota\epsilon}$ ποτὶ τὰ $\overline{\delta}$, ὅταν τὸ βάρος
ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα λόγον ἔχη τοῦ ὃν ἔχει τὸ τετρά-
γωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, $\bar{\alpha}$ μείζων ἐστὶν ἢ ἄξων ἢ
ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ
ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν, ὥστε τὰν βάσιν
10 μὴ ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, οὔτ' ἐς ὀρθὸν ἀποκαταστασεῖται
οὔτε μενεῖ κεκλιμένον, πλὴν ὁπότεν ὁ ἄξων αὐτοῦ ποτὶ
τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν ποιῇ γωνίαν ἴσαν τᾷ μελλούσα
λέγεσθαι.

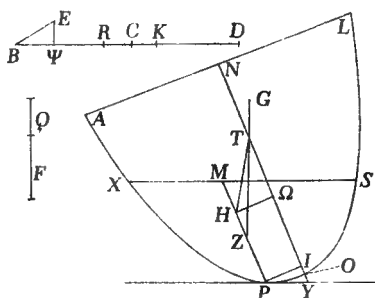


Fig. 103

Ἐστω τμᾶμα οἷον εἴρηται, καὶ ἡ ΒΔ ἴσα τῷ ἄξονι,
15 καὶ ἡ μὲν ΒΚ τᾶς ΚΔ διπλασία, ἡ δὲ ΚΡ ἴσα τᾷ μέχρι
τοῦ ἄξονος, ἔστω δὲ καὶ ἡ μὲν ΤΒ ἡμιολία τᾶς ΒΡ, ἡ δὲ
ΤΔ τᾶς ΚΡ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ

3 ἢ om. C || 5 $\overline{\iota\epsilon} \propto : \overline{\iota\epsilon}$ η C || 11 οὔτε μενεῖ \propto : οὐ μὴν C || 12
τοῦ om. C || 16 δὲ \propto : δὴ C || 16-17 ἡ δὲ ΤΔ τᾶς ΚΡ om. \propto ||
17 δὲ \propto : δὴ C.

le rapport du carré sur la somme de Φ et de X au carré sur ΔB soit égal au rapport entre le poids du segment de paraboloïde et le poids du liquide (sc. de même volume). Soit, de plus, Φ double de X . Il est, dès lors, évident que le rapport de la somme de Φ et de X à ΔB est inférieur au rapport de TB à $B\Delta$; car TB est l'excès de l'axe sur les trois demis du paramètre¹; il s'ensuit² que la somme de Φ et de X est inférieure à BT et que, par conséquent, Φ est à son tour inférieur à BP . Soit $P\Psi$ égal à Φ ; menons la perpendiculaire ΨE à $B\Delta$; que le carré sur ΨE soit équivalent à la moitié du rectangle compris entre KP et $B\Psi$; menons la droite BE . Il faut démontrer que le segment, abandonné dans le liquide de la manière indiquée, prendra une position inclinée telle que son axe fera avec la surface du liquide un angle égal à l'angle $EB\Psi$.

Abandonnons, en effet, un segment dans le liquide; que sa base ne touche pas la surface du liquide, et que l'angle entre son axe et la surface du liquide ne soit pas, si possible, égal à l'angle B (sc. $EB\Psi$), mais d'abord plus grand.

Que l'intersection du segment avec un plan passant par son axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole $A\Pi O\Lambda$; soit $\Xi\Sigma$ la trace du plan sécant dans la surface du liquide, NO l'axe du segment et le diamètre de la parabole. Menons parallèlement à $\Xi\Sigma$ la droite ΠY , tangente à la parabole $A\Pi O\Lambda$ au point Π ; menons aussi la parallèle ΠM à NO et la perpendiculaire ΠI à NO ; soit $O\Omega$ égal à BP et $\Omega\Theta$ égal à PK , et soit ΩH perpendiculaire à l'axe. Du moment donc que, par hypothèse, l'axe du segment fait avec la surface du liquide un angle supérieur à l'angle de sommet B , il est évident que dans le triangle

1. On a en effet : $TB = B\Delta - T\Delta = B\Delta - \frac{3}{2} KP$, et par

hypothèse $\frac{(\Phi + X)^2}{B\Delta^2} = \frac{\text{poids du segm.}}{\text{poids du liqu.}} < \frac{TB^2}{B\Delta^2}$.

2. Cf. Eucl. V, 10.

ὕγρον, τοῦτον ἐχέτω τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΒ, ἔστω δὲ καὶ ἡ Φ <διπλασία τᾶς Χ. Δῆλον οὖν ὅτι> ἡ ΦΧ ποτὶ τὴν ΔΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΤΒ ποτὶ τὴν ΒΔ · ἔστι γὰρ ἡ ΤΒ ἡ ὑπεροχά, & μείζων ἢ ἡμιόλιος ὁ ἄξων τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος · ἐλάσσων ἄρα ἡ ΦΧ τᾶς ΒΤ · ὥστε καὶ ἡ Φ τᾶς ΒΡ. Ἐστω δὴ τῇ Φ ἴσα ἡ ΡΨ, καὶ τῇ ΒΔ ὀρθὰ ἄχθω ἡ ΨΕ δυναμένα τὸ ἡμισυ τοῦ ὑπὸ τῶν ΚΡ, ΒΨ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΕ. Δεικτέον ὅτι τὸ τμήμα ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν ὡς εἴρηται καταστασεῖται
10 κεκλιμένον, ὥστε τὸν ἄξονα ποτὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιεῖν γωνίαν ἴσαν τῇ ΕΒΨ.

Ἀφείσθω γάρ τι ἐς τὸ ὑγρὸν τμήμα, καὶ ἡ βάσις αὐτοῦ μὴ ἀπτέσθω τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καί, εἰ δυνατόν, μὴ ποιείσθω ὁ ἄξων αὐτοῦ ποτὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ
15 ὑγροῦ ἴσαν τῇ Β, ἀλλὰ μείζω πρῶτον.

Τμαθέντος δὴ τοῦ τμήματος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ ποτὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἔστω ἡ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἐν δὲ τῇ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειᾳ ἡ ΞΣ, ἄξων δὲ καὶ διάμετρος [τοῦ τμήματος] ἡ ΝΟ. Ἀχθὼ
20 δὴ καὶ ἡ μὲν ΠΥ παρὰ τὴν ΞΣ ἐφαπτομένα τᾶς ΑΠΟΛ τομᾶς κατὰ τὸ Π, ἡ δὲ ΠΜ παρὰ τὴν ΝΟ, ἡ δὲ ΠΙ κάθετος ἐπὶ τὴν ΝΟ, καὶ τῇ ΒΡ ἔστω ἴσα ἡ ΟΩ, τῇ δὲ ΡΚ ἡ ΩΘ, καὶ ὀρθὰ ἡ ΩΗ τῷ ἄξονι. Ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὁ ἄξων τοῦ τμήματος ποτὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν
25 μείζονα τᾶς Β, δῆλον ὅτι τοῦ ΠΙΥ τριγώνου ἡ ποτὶ τῷ

1 ἐχέτω om. ζ || 2 ΔΒ ms. ζ : ΑΒ ms. C || 2-3 διπλασία τᾶς Χ. Δῆλον οὖν ὅτι Heiberg : *dupla ipsius q. palam igitur quod* ζ || 4 ΤΒ pr. ms. ζ : Β ms. C || ἡ ΤΒ ἡ Heiberg : *quae gd* ζ om. C || 5 ἢ om. C || 7 ΡΨ Heiberg : *rx* ζ || 8 ΚΡ, ΒΨ Heiberg : *krx* ζ || 11 γωνίαν ἴσαν τῇ ΕΒΨ Heiberg : *angulum aequalem angulo ebx* ζ || 12 ἀφείσθω Heiberg : *ἀφήσθω* C *demittatur* ζ || 17 ὀρθῶ om. C || ἔστω Comm. : *ἔσται* ζ C || 18 ὀρθογωνίου ζ : ὀρθογώνιον C || 21 δὲ pr. ζ : μὲν C || παρὰ ζ : ἄρα C || 22 ἴσα ἡ ΟΩ Heiberg : ἡ ΗΒ τῇ ΟΩ ms. C *aequalis ipsi iw* ζ || τῇ δὲ ΡΚ ἡ ΩΘ Heiberg : ἡ δὲ ΡΚ τῇ ΩΘ ms. C *quae autem rk ipsi tw* ζ.

IIIY l'angle en Y est supérieur¹ à l'angle B ; il s'ensuit que le rapport du carré sur III au carré sur IY est supérieur au rapport du carré sur EY au carré sur YB. Mais le rapport du carré sur III au carré sur IY est égal au rapport de KP à YI, et le rapport du carré sur EY au carré sur YB est égal au rapport de la moitié de KP à YB ; il s'ensuit que le rapport de KP à YI est supérieur au rapport de la moitié de KP à YB ; YI est donc inférieur² au double de YB ; or IY est double de OI ; par conséquent, OI est inférieur à YB, de façon que IO est supérieur³ à YP. Mais YP est égal à Φ ; IO est donc supérieur à Φ . Comme on a supposé, d'autre part, que le rapport entre le poids du segment à celui du liquide est égal au rapport du carré sur la somme de Φ et de X au carré sur BA, et comme le rapport entre le poids du segment et le poids du liquide (sc. de même volume) est égal⁴ au rapport de la partie immergée du segment au segment entier, et que, enfin, le rapport de la partie immergée au segment entier est égal⁵ au rapport du carré sur IIM au carré sur ON, le rapport du carré sur la somme de Φ et de X au carré sur BA sera égal au rapport du carré sur MII au carré sur ON ; il s'ensuit que la somme de Φ et de X est égale à IIM. Or on a démontré que IIH est supérieur à Φ ; il est donc évident⁶ que IIM est inférieur aux trois demis de IIH, et que IIH est supérieur au double de HM. Soit donc IIZ double de ZM ; dès lors, le centre de gravité du solide⁷ sera le point Θ , celui de la partie immergée⁸ dans le liquide le point Z ; le centre de gravité de la grandeur restante sera donc situé⁹ sur le prolongement de la droite

1. Cf. Eucl. I, 29.

2. Cf. Eucl. V, 10.

3. Cf. plus haut.

4. Cf. prop. II, 1.

5. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.

6-7. Cf. notes complémentaires.

8. Cf. prop. II, 2.

9. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.

Υ γωνία μείζων τᾶς Β · μείζονα δὴ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον
 τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΙ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΙΥ ἢ τὸ
 τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΨ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ
 τᾶς ΨΒ. Ἄλλ' ὃν μὲν λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΙ τετράγωνον
 5 ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΙΥ, τοῦτον ἔχει ἡ ΚΡ ποτὶ ΥΙ, ὃν δὲ λόγον
 ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΨ ποτὶ τὸ τετράγωνον
 τὸ ἀπὸ τᾶς ΨΒ, τοῦτον ἔχει ἡ ἡμίσεια τᾶς ΚΡ ποτὶ τὰν
 ΨΒ · μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ ΚΡ ποτὶ τὰν ΥΙ ἢ περ ἡ
 ἡμίσεια τᾶς ΚΡ ποτὶ τὰν ΨΒ · ἐλάσσων ἄρα ἡ διπλασία
 10 ἡ ΥΙ τᾶς ΨΒ. Τᾶς δὲ ΟΙ διπλασία ἡ ΙΥ · ἐλάσσων ἄρα ἡ
 ΟΙ τᾶς ΨΒ · ὥστε ἡ ΙΩ μείζων ἐστὶ τᾶς ΨΡ. Ἄ δὲ ΨΡ
 ἴσα ἐστὶ τῇ Φ · μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΙΩ τᾶς Φ. Καὶ ἐπεὶ
 ὑπόκειται τὸ τμήμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἔχειν λόγον,
 ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ ποτὶ τὸ τετράγωνον
 15 τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμήμα τῷ βάρει
 ποτὶ τὸ ὑγρὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ
 ποτὶ τὸ ὅλον τμήμα, ὃν δὲ τὸ δεδυκὸς ποτὶ τὸ ὅλον,
 τοῦτον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΜ ποτὶ τὸ
 τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΟΝ, ὃν ἄρα λόγον ἔχει τὸ τετρά-
 20 γωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ,
 τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΠ
 ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΟΝ · ἴσα ἄρα ἐστὶν ἡ
 ΦΧ τῇ ΠΜ. Ἄ δὲ ΠΗ ἐδείχθη μείζων ἐοῦσα τᾶς Φ · δηλὸν
 οὖν ὅτι ἡ ΠΜ ἐλάσσων ἢ ἡμιολία ἐστὶν τᾶς ΠΗ, ἡ δὲ ΠΗ
 25 τᾶς ΗΜ μείζων ἢ διπλασίῳ. Ἔστω οὖν ἡ ΠΖ διπλασίῳ
 τᾶς ΖΜ · ἐσσεῖται δὴ τὸ μὲν Θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ
 στερεοῦ, τοῦ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ Ζ · τοῦ δὴ λοιποῦ μεγέθους
 τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΖΘ εὐθείας

1 μείζων \mathcal{L} : μεῖζον C || 7 τὸ om. \mathcal{L} || ἡ om. C || 9 διπλασία
 Heiberg : διπλῇ C || 10 ΨΒ ms. C : cd \mathcal{L} || ΟΙ διπλασία ἡ ΙΥ om.
 C : oi dupla est quae ω propter septimum theorema primi libri
 elementorum conicorum Apollonii \mathcal{L} || 12 τῇ \mathcal{L} : τῆς C || 14 τὸ
 pr. om. C || 24 ἢ om. C || 25 ΗΜ ms. \mathcal{L} : ΝΜ ms. C || 26 τοῦ
 alt. om. C.

joignant Z à Θ . Qu'elle soit prolongée jusqu'au point Γ ; on démontrera de la même manière que ΘH est perpendiculaire à la surface du liquide ; la partie du segment immergée dans le liquide ira hors du liquide suivant la perpendiculaire menée par Z à la surface du liquide, et la partie qui émerge du liquide descendra dans le liquide suivant la perpendiculaire menée par Γ ; le segment ne restera donc pas dans la position inclinée que nous avons supposée.

Mais il ne se redressera pas non plus dans la position droite. Ceci est évident pour les raisons que voici : du moment que des deux perpendiculaires menées par Z et Γ celle qui est menée par Z tombe du côté de la droite ΓZ où se trouve le point A et que celle qui est menée par Γ tombe du côté où se trouve le point A , il est évident que, en vertu de ce qui a été dit plus haut¹, le centre Z montera, alors que le centre Γ descendra ; par conséquent, les parties de la grandeur entière situées du côté de A descendront.

Ces considérations étaient utiles pour la démonstration.

Faisons de nouveau les mêmes hypothèses, mais que l'axe du segment fasse avec la surface du liquide un angle inférieur à l'angle de sommet B ; dès lors, le rapport du carré sur ΠI au carré sur $I\Gamma$ est inférieur au rapport du carré sur $E\Psi$ au carré sur ΨB ; il s'ensuit que le rapport de KP à ΥI est inférieur au rapport de la moitié de KP à ΨB . Le segment $I\Gamma$ sera donc supérieur au double de ΨB , et par conséquent ΩI inférieur à ΨP . Le segment ΠH sera donc lui aussi inférieur au segment Φ . Mais $M\Pi$ est égal à la somme de Φ et de X ; il est donc évident que ΠM est supérieur au trois demis de ΠH , et que ΠH est inférieur au double

1. Cf. la fin de la prop. I, 7.

ἐπιζευχθείσας καὶ ἐκβληθείσας. Ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Γ ·
 δειχθήσεται δὴ ὁμοίως ἂ ΘΗ κάθετος ἐούσα ἐπὶ τὰν
 τοῦ ὕγρου ἐπιφάνειαν, καὶ τὸ μὲν ἐντὸς τοῦ ὕγρου τμᾶμα
 ἐνεχθήσεται εἰς τὸ ἐκτὸς τοῦ ὕγρου κατὰ τὰν διὰ τοῦ
 5 Ζ ἀγμέναν κάθετον ἐπὶ τὰν τοῦ ὕγρου ἐπιφάνειαν, τὸ
 δὲ ἐκτὸς τοῦ ὕγρου ἐνεχθήσεται εἰς τὸ ἐντὸς κατὰ τὰν
 διὰ τοῦ Γ · οὐ μενεὶ δὴ τὸ τμᾶμα κατὰ τὰν ὑποκειμένην
 κλίσιν.

Οὐδὲ μὴν εἰς τὸ ὀρθὸν ἀποκαταστασεῖται. Δῆλον
 10 δὲ διὰ τούτων · ἐπειδὴ τῶν ἀγμένων διὰ τῶν Ζ, Γ καθέτων
 ἂ μὲν διὰ τοῦ Ζ ἀγμένα τᾶς ΓΖ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρεα πίπτει,
 ἐφ' ᾗ ἐστι τὸ Λ, ἂ δὲ διὰ τοῦ Γ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Α, δῆλον
 ὅτι διὰ τὰ προειρημένα τὸ μὲν Ζ κέντρον ἄνω οἰσθήσεται,
 τὸ δὲ Γ κάτω · ὥστε τοῦ ὅλου μεγέθους τὰ μέρεα τὰ ἀπὸ
 15 τοῦ Α κάτω οἰσθήσεται.

Τοῦτο δ' ἦν εὐχρηστον ποτὶ τὸ δεῖξαι.

Ὑποκείσθω πάλιν τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, ὃ δὲ ἄξων τοῦ
 τμάματος ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕγρου ποιεί(τω γωνίαν
 ἐλάσσονα τᾶς ποτὶ τῷ Β · ἐλάσσονα δὴ λόγον) ἔχει τὸ
 20 τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΙ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΙΥ ἢ τὸ ἀπὸ
 τᾶς ΕΨ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΨΒ · καὶ ἂ ΚΡ ἄρα ποτὶ τὰν
 ΥΙ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἂ ἡμίσεια τᾶς ΚΡ ποτὶ τὰν
 ΨΒ. Μείζων ἄρα ἐσσεῖται ἢ διπλασίων ἂ ΙΥ τᾶς ΨΒ · ἂ
 ἄρα ΩΙ ἐλάσσων τᾶς ΨΡ. Ἐσσεῖται οὖν καὶ ἂ ΠΗ ἐλάσσων
 25 τᾶς Φ. Ἀ δὲ ΜΠ τᾶ ΦΧ ἴσα · δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἢ
 ἡμιολία ἂ ΠΜ τᾶς ΠΗ, ἂ δὲ ΠΗ ἐλάσσων ἢ διπλασίον

1 ἐκβληθείσας om. C || Γ ms. ζ : ΕΠ ms. C || 2 δὴ Heiberg :
 δὲ C autem ζ || 7 δὴ Heiberg : δὲ Cζ || 12 ἐστι τὸ Α Comm. :
 ἐστι τὸ Γ ms. C est et secundum g ζ || τῷ Α Comm. : τῇ Ζ
 ms. C ipsi zg ζ || 16 τοῦτο Heiberg : hoc ζ τοῦ C || εὐχρηστον
 C : inutile ζ || 20 ΙΥ ms. C : ιω ζ || 21 ΕΨ ms. C : ex ζ || 22 ΥΙ
 ms. C : ωι ζ || ἤπερ ἂ om. C || 23 μείζων Heiberg : μείζον Cζ
 || 24 ΠΗ ms. C : ph ζ || 25 τᾶ Heiberg : τῆς C ipsi ζ || ἴσα
 Heiberg : est aequalis ζ om. C || οὖν Heiberg : om. ζC.

de HM. Le point H est donc le centre de gravité de la partie immergée dans le liquide¹; par conséquent, celle-ci montera suivant la verticale de ce point, et la partie qui émerge descendra; le segment (sc. entier) restera donc en place; car ses parties se poussent l'une l'autre en sens contraire.

9.

Si un segment droit de paraboloïde a un axe supérieur aux trois demis du paramètre, mais trop petit pour que son rapport (sc. au paramètre) soit égal au rapport de quinze à quatre, et si le rapport de son poids à celui du liquide (sc. de même volume) est supérieur au rapport entre l'excès du carré de l'axe sur le carré de l'excès de l'axe sur les trois demis du paramètre, d'une part, et le carré de l'axe, d'autre part, ce segment, abandonné dans le liquide, de manière que sa base soit entièrement dans le liquide, et placé dans une position inclinée, ne se dressera pas de manière que son axe soit dans la verticale, et il ne restera incliné que si son axe fait avec la surface du liquide un angle égal à celui qui a été pris précédemment².

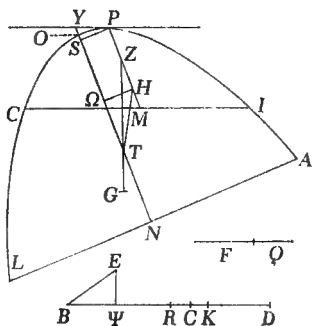


Fig. 105

1. Cf. prop. II, 2.

2. Cf. prop. II, 8.

Soit un segment tel qu'il vient d'être indiqué, et un segment de droite ΔB égal à l'axe du segment (sc. de paraboloïde) ; soit BK double de $K\Delta$, KP égal au paramètre, et TB égal aux trois demis de BP ; que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide soit égal au rapport entre l'excès du carré de $B\Delta$ sur le carré de la somme de Φ et X , d'une part, et le carré de $B\Delta$, d'autre part ; que le segment de droite Φ soit double de X . Il est, dès lors, évident que le rapport entre l'excès du carré de $B\Delta$ sur le carré de BT , d'une part, et le carré sur $B\Delta$, d'autre part, est inférieur au rapport entre l'excès du carré de $B\Delta$ sur le carré de la somme de Φ et X , d'une part, et le carré de $B\Delta$, d'autre part ; car BT est l'excès de l'axe du segment sur les trois demis du paramètre¹. Il s'ensuit que l'excès du carré de $B\Delta$ sur le carré de la somme de Φ et X est supérieur² à l'excès du carré de $B\Delta$ sur le carré de BT , de façon que la somme de Φ et de X est inférieure à BT et que, partant, Φ est inférieur à BP .

Soit donc $P\Psi$ égal à Φ ; menons la perpendiculaire ΨE à $B\Delta$; que le carré sur ΨE soit équivalent à la moitié du rectangle compris entre KP et ΨB . Je dis que si le segment est abandonné dans le liquide de manière que sa base soit entièrement dans le liquide, il prendra une position telle que son axe fera avec la surface du liquide un angle égal à l'angle de sommet B .

Que le segment soit, en effet, abandonné dans le liquide de la manière indiquée ; que l'angle de son axe avec la surface du liquide ne soit pas égal à l'angle B , mais d'abord plus grand que B .

Que l'intersection du segment avec un plan perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole

1. Cf. prop. II, 8.

2. Cf. Eucl. V, 10.

Ἐστω τμᾶμα οἶον εἴρηται, καὶ κείσθω ἃ ΔΒ ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμᾶματος, καὶ ἃ μὲν ΒΚ τᾶς ΚΔ διπλασία ἔστω, ἃ δὲ ΚΡ ἴσα τῇ μέχρι τοῦ ἄξονος, ἃ δὲ ΤΒ ἡμιολία τᾶς ΒΡ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, 5 τοῦτον ἐχέτω ἃ ὑπεροχά, ἃ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἔστω δὲ ἃ Φ διπλασία τᾶς Χ. Δῆλον οὖν ὅτι ἃ ὑπεροχά, ἃ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΤ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ 10 τᾶς ΒΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἃ ὑπεροχά, ἃ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ · ἔστι γὰρ ἃ ΒΤ ἃ ὑπεροχά, ἃ μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος ὁ ἄξων τοῦ τμᾶματος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. Μείζονι ἄρα ὑπερέχει 15 τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΤ · ὥστε ἃ Φ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΒΤ · καὶ ἃ Φ ἄρα τᾶς ΒΡ.

Ἐστω οὖν τῇ Φ ἴσα ἃ ΡΨ, καὶ ἃ ΨΕ ὀρθὰ ἄχθω τῇ ΒΔ 20 δυναμένα τὸ ἡμισυ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ΚΡ, ΨΒ. Φαμί ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, καταστασεῖται οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἴσαν τῇ Β. 25 Ἀφείσθω [μὲν] γὰρ τὸ τμᾶμα, ὡς εἴρηται, ἐς τὸ ὑγρόν, καὶ μὴ ποιείτω ὁ ἄξων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ἴσαν τῇ Β, ἀλλὰ μείζονα πρότερον.

Τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἔστω τοῦ τμᾶματος τομὰ ἃ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου

4 τῷ Heiberg : τὸ C || 9 τοῦ Heiberg : τὸ C || 10 ἐλάσσονα — 13 ὑπεροχά suppl. Comm. : om. C~~z~~ || 13 τοῦ Heiberg : τὸ C || 19 ΡΨ, καὶ ἃ ΨΕ ms. C : rx et quae xe ~~z~~ || 20 ὑπὸ τᾶν Heiberg : ὑπὲρ τῆς C sub ~~z~~ || 25 μὲν C~~z~~ : del. Heiberg || 28 δὴ Heiberg : δὲ C~~z~~.

ΑΠΟΑ ; soit TI la trace du plan sécant dans la surface du liquide, NO l'axe et le diamètre de la parabole ; coupons NO, comme précédemment¹, par les points Ω et Θ ; menons la droite ΥΠ parallèle à TI et tangente à la parabole en Π, la droite ΠΜ parallèlement à NO et la droite PS (sc. ΠΣ) perpendiculaire à l'axe. Du moment donc que l'axe du segment fait avec la surface du liquide un angle supérieur à l'angle de sommet B, l'angle SYP sera lui aussi supérieur² à l'angle B ; il s'ensuit que le rapport du carré sur PS au carré sur SY est supérieur au rapport du carré sur ΨΕ au carré sur ΨΒ. Par conséquent, le rapport de KR à SY est lui aussi supérieur au rapport de la moitié de KR à ΨΒ ; SY est donc inférieur³ au double de ΨΒ, et SO est inférieur à ΨΒ. Le segment de droite ΣΩ est donc supérieur à PΨ, et ΠΗ est supérieur à Φ. Et comme le rapport du poids du segment au poids du liquide est égal au rapport entre l'excès du carré de ΒΔ sur le carré de la somme de Φ et X, d'une part, et le carré de ΒΔ d'autre part, et que le rapport du poids du segment au poids du liquide est égal au rapport de la partie immergée du segment au segment entier, il est évident que le rapport de la partie immergée au segment entier sera égal au rapport de l'excès du carré de ΒΔ sur le carré de la somme de Φ et X au carré de ΒΔ ; il s'ensuit que le rapport du segment entier à la partie qui émerge du liquide sera égal⁴ au rapport du carré sur ΒΔ au carré sur la somme de Φ et de X. Or le rapport du segment entier à la partie qui émerge du liquide est égal⁵ au rapport du carré sur NO au carré sur ΠΜ ; le segment de droite ΜΠ est donc égal⁶ à la

1. Cf. prop. II, 8.

2. Cf. Eucl. I, 29.

3. Cf. Eucl. V, 10.

4. Cf. Eucl. V, 7, coroll. ; V, 19, coroll.

5. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.

6. Cf. Eucl. V, 9.

κώνου τομά, τᾶς δὲ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας ἅ ΤΙ, ἄξων δὲ [τῆς τομῆς] καὶ διάμετρος ἅ ΝΟ, καὶ τετμάσθω κατὰ τὰ Ω, Θ, ὡς καὶ πρότερον, ἄχθω δὲ καὶ ἅ μὲν ΥΠ παρὰ τὰν ΤΙ ἐφαπτομένα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Π, ἅ δὲ ΠΜ

- 5 *aequedistanter ipsi NO, quae vero PS perpendicularis super axem. Quoniam igitur axis portionis ad superficiem humidi facit angulum maiorem angulo B, erit utique et angulus qui sub SYP maior angulo B ; tetragonum ergo quod a PS ad tetragonum quod*
 10 *ab SY habet proportionem maiorem quam tetragonum quod a Ψ'E ad tetragonum quod a Ψ'B. Ergo et quae KR ad SY habet proportionem maiorem quam medietas ipsius KR ad Ψ'B ; minor ergo quae SY quam dupla ipsius Ψ'B. Et quae SO quam Ψ'B*
 15 *minor ;*

- μεῖζων ἄρα ἅ ΣΩ τᾶς ΡΨ καὶ ἅ ΠΗ τᾶς Φ. Καὶ ἐπεὶ τὸ τμᾶμα βάρει λόγον ἔχει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν ἅ ὑπεροχά, ἧ μείζον ἐστὶν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς
 20 ΒΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ τμᾶμα ποτὶ τὸ ὅλον, δηλὸν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ μέρος ποτὶ τὸ ὅλον τμᾶμα, ὃν ἅ ὑπεροχά, ἧ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ
 25 τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ΒΔ · ἔξει οὖν καὶ τὸ ὅλον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ. Ὅν δὲ λόγον ἔχει τὸ ὅλον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΝΟ ποτὶ τὸ ἀπὸ ΠΜ · ἴσα ἄρα ἅ ΜΠ τῇ

1 TI ms. ζ : TIM ms. C || 2 τῆς τομῆς C : portionis ζ del. Heiberg || 5-15 13 lineae legi nequeunt in C || 16 ἐπεὶ C : si ζ || 22 ὅλον, δηλὸν, ὅτι Heiberg : ὅτι C || 25 ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον C : fq ad tetragonum ζ.

somme de Φ et de X . Mais on a montré que ΠH est supérieur à Φ ; MH est donc inférieur à X ; il s'ensuit que ΠH est supérieur au double de HM . Soit donc le segment de droite ΠZ double de ZM ; joignons Z à Θ et prolongeons la droite $Z\Theta$ jusqu'à Γ ; le segment entier aura donc pour centre de gravité le point Θ , la partie qui émerge du liquide aura pour centre¹ le point Z , et le centre de gravité de la partie immergée sera situé² sur la droite $\Theta\Gamma$; soit Γ ce centre. On montrera dès lors comme précédemment que ΘH est perpendiculaire à la surface du liquide³, et que les parallèles à ΘH menées par les points Z et Γ sont elles aussi perpendiculaires à la surface du liquide. Il s'ensuit que la partie du segment qui émerge du liquide descendra suivant la verticale passant par Z , et que la partie immergée montera suivant la verticale passant par Γ ; le segment entier ne restera donc pas sans inclinaison. Mais il ne se dressera pas de manière que son axe soit perpendiculaire à la surface du liquide, puisque ses parties situées du côté de Λ descendront, alors que les parties du côté de A monteront, pour des raisons semblables à celles qui sont indiquées dans la proposition précédente⁴.

Mais si l'axe fait avec le liquide un angle inférieur à l'angle B , on montrera de la même manière que plus haut que le segment ne restera pas en place, mais s'inclinera jusqu'à ce que l'axe fasse avec la surface du liquide un angle égal à l'angle B .

1. Cf. prop. II, 2.

2. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.

3. Cf. prop. II, 4.

4. Cf. prop. II, 8.

- ΦΧ. Ἄ δὲ ΠΗ δέδεικται μείζων τᾶς Φ · ἃ ἄρα ΜΗ ἐλάσσων
 ἐστὶν τᾶς Χ · μείζων <ἄρα ἐστὶν ἢ διπλασία ἃ ΠΗ> τᾶς
 <ΗΜ. Ἐστω δὴ ἃ ΠΖ διπλασία τᾶς ΖΜ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα
 ἃ ΖΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Γ · ἔσται οὖν τοῦ μὲν ὅλου
 5 τμᾶματος κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐκτός> τοῦ
 ὑγροῦ τὸ <Ζ, τοῦ δὲ ἐντός ἐν τῇ ΘΓ · ἔστω δὲ τὸ> Γ.
 <Δειχθήσεται δὴ ὁμοίως τοῖς πρότερον ἃ ΘΗ> κάθετος
 ἐπὶ <τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ αἱ διὰ τῶν Ζ, Γ παρὰ
 τὰν ΘΗ> ἀγόμεναι κάθετοι καὶ αὐταὶ ἐπὶ τὰν ἐπιφάνειαν
 10 τοῦ ὑγροῦ. Κατενεχθήσεται ἄρα τὸ μὲν ἐκτός τοῦ ὑγροῦ
 τμᾶμα ἐς τὸ κάτω κατὰ τὰν διὰ τοῦ Ζ, τὸ δὲ ἐντός κατὰ
 τὰν διὰ τοῦ Γ ἀνενεχθήσεται · οὐ μενεῖ οὖν τὸ ὅλον τμᾶμα
 ἀκλινές. Οὐδὲ μὴν καταστραφήσεται, ὥστε κατὰ κάθετον
 εἶμεν τὸν ἄξονα ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, ἐπειδὴ
 15 τὰ ἐπὶ <τὰ αὐτὰ τῷ Λ κάτω, τὰ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Α ἐς
 τὰ ἄνω οἰσθήσεται,> διὰ τὰ ἀνάλογον τοῖς λεγομένοις
 ἐπὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ.

- Ἐὰν δὲ ἡ ἄξων ποτὶ τὸ ὑγρὸν ποιῇ γωνίαν ἐλάσσονα
 τᾶς Β, ὁμοίως τοῖς πρότερον δειχθήσεται ὅτι οὐ μενεῖ
 20 τὸ τμᾶμα, ἀλλὰ κλιθήσεται, ἕως ἄν ὁ ἄξων ποιῇ γωνίαν
 ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἴσαν τῇ Β.

2 <ἄρα ἐστὶν ἢ διπλασία ἃ ΠΗ> Comm. : ergo quae pm est maior quam dupla \propto || 3 <ΗΜ. — 5 ἐκτός> Heiberg : hm, sit igitur quae pz dupla ipsius zm et copulata quae zt educatur ad g, erit ergo totius quidem portionis centrum grauitatis t, eius autem quae extra \propto || 6 <Ζ, — 7 ΘΗ> Heiberg : z, eius uero quae intra in linea tg, sit autem g, demonstrabitur autem similiter prioribus quae th \propto || 8 <τὰν — 9 ΘΗ> Heiberg : superficiem humidi et quae per z g aequedistanter ipsi th \propto || 11-12 κατὰ τὰν \propto : om. C || 15 <τὰ — 16 οἰσθήσεται,> Comm. : ex parte I ad superiora ferentur \propto || 16 τὰ ἀνάλογον Heiberg : τὸν ἀνάλογον C proportionalia \propto || 19 μενεῖ Heiberg : μένει C \propto .

10.

Si un segment droit de parabolôïde, plus léger que le liquide (sc. de même volume), a un axe trop grand pour que son rapport au paramètre soit égal au rapport de quinze à quatre, ce segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche pas le liquide, prendra tantôt une position droite, tantôt une position inclinée ; son inclinaison sera tantôt telle que sa base touche la surface du liquide en un seul point, ce qui arrivera pour deux positions inclinées, tantôt telle que sa base se trouve mouillée sur une étendue plus grande, tantôt telle, enfin, que sa base ne touche la surface du liquide en aucun point ; nous allons expliquer maintenant pour quels rapports entre le poids du segment et le poids du liquide ces différents cas vont se présenter.

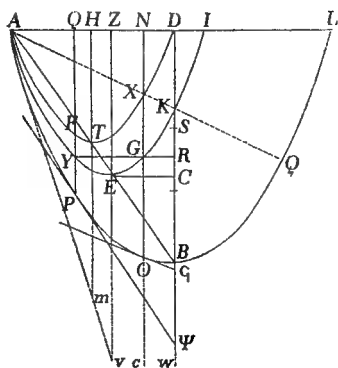


Fig. 106

ι'.

- Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὅταν
 κουφότερον ὢν τοῦ ὑγροῦ τὸν ἄξονα ἔχη μείζονα ἢ ὥστε
 λόγον ἔχειν ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος [τοῦ] ὃν ἔχει τὰ
 5 $\bar{\epsilon}$ ποτὶ τὰ $\bar{\delta}$, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ
 μὴ ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, ὅτε μὲν ὀρθὸν καταστασεῖται,
 ὅτε δὲ κεκλιμένον, καὶ ποτὲ μὲν οὕτω κεκλιμένον, ὥστε
 τὰν βάσιν αὐτοῦ καθ' ἓν σαμεῖον ἄπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ
 ἐπιφανείας, καὶ τοῦτο ἐν δισσοῖς κλιμάτεσσι ποιήσει,
 10 ποτὲ δὲ οὕτως κεκλιμένον καταστασεῖται, ὥστε τὰν
 βάσιν αὐτοῦ κατὰ πλείονα τόπον βρέχεσθαι, ποτὲ δὲ
 οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἄπτεσθαι τᾶς
 τοῦ ὑγροῦ ἐπιφα<νείας· ὃν δὲ λόγον ἔχοντος τῷ> βάρει
 ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἕκαστα αὐτῶν ἐσσεῖται, νῦν δηλωθήσεται.

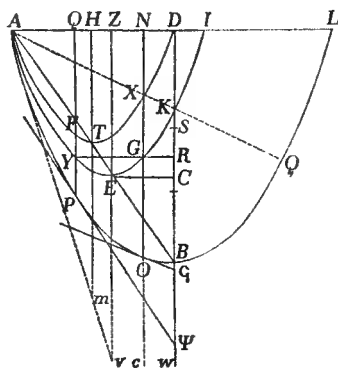


Fig. 106

3 ἢ \mathcal{Z} : om. C || 4 [τοῦ] C : τοῦ ὃν \mathcal{Z} del. Heiberg || 13 <ὃν
 δὲ λόγον ἔχοντος τῷ> Heiberg : quam autem proportionem
 habente ad \mathcal{Z} .

Soit un segment tel qu'il vient d'être indiqué ; que l'intersection de sa surface avec un plan perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole $\Lambda\Pi O\Lambda$, et soit $B\Delta$ l'axe et le diamètre de la parabole ; coupons $B\Delta$ par le point K de manière que BK soit double de $K\Delta$, et par le point T de manière que ΔB soit à KT comme quinze est à quatre ; il est dès lors évident que KT est supérieur au paramètre¹. Soit donc KP égal au paramètre, et $P\Sigma$ égal à la moitié de BP ; alors ΣB est égal aux trois demis de BP . Menons la droite AB , élevons la perpendiculaire TE (sc. sur $B\Delta$), menons la parallèle EZ à $B\Delta$, divisons AB en deux parties égales par le point Θ et menons la parallèle ΘH à $B\Delta$; donnons nous la parabole AEI de diamètre EZ , et la parabole $A\Theta\Delta$ de diamètre ΘH , de manière que les segments AEI et $A\Theta\Delta$ (sc. de ces paraboles) soient semblables² au segment $ABA\Delta$; la parabole AEI sera, dès lors, décrite par le point³ K , et la perpendiculaire élevée en P à $B\Delta$ coupera⁴ la parabole AEI . Soit Υ et Γ les points d'intersection ; menons par Υ et Γ les parallèles ΥX et ΓN à $B\Delta$; que ces parallèles coupent le segment de parabole $A\Theta\Delta$ aux points Ξ et Φ ; menons aussi les droites $\Pi\Psi$ et $O\varsigma$, tangentes au segment $\Lambda\Pi O\Lambda$ aux points O et Π . Sont donc donnés les trois segments $\Lambda\Pi O\Lambda$, AEI et $A\Theta\Delta$, compris entre des droites et des paraboles, semblables mais inégaux, des segments de droite étant découpés de chaque base, les segments $N\Xi$, $N\Gamma$ et NO étant érigés du point N ; dès lors, le rapport de OF à ΓE sera égal

1-2. Cf. notes complémentaires.

3. D'après la prop. 4 du traité *La quadr. de la parab.*, la parabole AEI passe par le point K , si $\frac{\Delta Z}{ZA} = \frac{BK}{BA}$; or on a, d'après

Eucl. VI, 2, $\frac{\Delta Z}{ZA} = \frac{BE}{EA} = \frac{BT}{T\Delta} = \frac{BK}{BA} = \frac{2}{3}$, puisque $B\Delta = BK +$

$K\Delta = 3K\Delta = \frac{15}{4} KT$; $BT = BK - KT = \frac{3}{2} KT$, et $T\Delta =$

$\Delta K + KT = \frac{9}{4} KT$.

4. Parce que $ZE = DT > \Delta P$.

- Ἔστω τμᾶμα οἶον εἴρηται, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῶ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕγροῦ τομὰ ἔστω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἡ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τῆς τομᾶς ἡ ΒΔ, τετμάσθω δὲ ἡ ΒΔ
- 5 κατὰ τὸ Κ, ὥστε διπλασίαν εἶμεν τὰν ΒΚ τῆς ΚΔ, κατὰ δὲ τὸ Τ, ὥστε τὰν ΔΒ ποτὶ τὰν ΚΤ λόγον ἔχειν ὡς τὰ ἰε ποτὶ δ'· δηλὸν οὖν ὅτι ἡ ΚΤ μείζων ἐστὶ τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος. Ἔστω οὖν ἡ ΚΡ ἴσα τῇ μέχρι τοῦ ἄξονος, τῆς δὲ ΒΡ ἡμίσεια ἔστω ἡ ΡΣ· ἔστι δὴ καὶ ἡ ΣΒ ἡμιολία τῆς
- 10 ΒΡ. Ἐπιζευχθείσας δὲ τῆς ΑΒ καὶ τῆς ΤΕ ὀρθῶς ἀχθείσας ἄχθω ἡ ΕΖ παρὰ τὰν ΒΔ, καὶ πάλιν τῆς ΑΒ δίχα τμαθείσας κατὰ τὸ Θ ἄχθω παρὰ τὰν ΒΔ ἡ ΘΗ, καὶ λελάφθω ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἡ ΑΕΙ περὶ διάμετρον τὰν ΕΖ καὶ ἡ ΑΘΔ περὶ διάμετρον τὰν ΘΗ, ὥστε ὅμοια εἶμεν τὰ ΑΕΙ, ΑΘΔ
- 15 τμάματα τῷ ΑΒΛ τμάματι· γραφήσεται δὴ ἡ ΑΕΙ κώνου τομὰ διὰ τοῦ Κ, ἡ δὲ ἀπο τοῦ Ρ ὀρθὰ ἀχθείσα τῇ ΒΔ τεμεῖ τὰν ΑΕΙ. Τεμνέτω κατὰ τὰ Υ, Γ, καὶ διὰ τῶν Υ, Γ ἄχθωσαν παρὰ τὰν ΒΔ αἱ ΥΧ, ΓΝ, τεμνέτωσαν δὲ αὗται τὰν ΑΘΔ τομὰν κατὰ τὰ Ξ, Φ, ἄχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΠΨ,
- 20 Οἱ ἐφαπτόμενοι τῆς ΑΠΟΛ τομᾶς κατὰ τὰ Ο, Π. Δεδομένα δὴ τρία τινὰ τμάματα τὰ ΑΠΟΛ, ΑΕΙ, ΑΘΔ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ὀρθογωνίων κώνων τομᾶν ὀρθὰ καὶ ὅμοια, ἄνισα δέ, καὶ ἀπολέλαπται ἀφ' ἐκάστας βάσιος, ἀπὸ δὲ τοῦ Ν ἀναγμέναι αἱ ΝΞ, ΝΓ, ΝΟ· ἡ ΟΓ ἄρα ποτὶ
- 25 τὰν ΓΞ τὸν συγκείμενον λόγον ἔξει ἕκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ

3 ἡ ζ : om. C || 5 διπλασίαν εἶμεν Heiberg : διπλῆν εἶναι C dupla sit ζ || BK ms. C : bd ζ || 6 Τ ms. C : c ζ || KT ms. C : kc ζ || 8 ἔστω — ἄξωνος C : om. ζ || 9 δὲ ΒΡ Heiberg : ΔΕ ΒΡ ms. C autem kr ζ || δὴ Heiberg : δὲ CB || 13 ΑΕΙ ms. C : ae ζ || ΑΘΔ ms. C : at ζ || 14 ΑΕΙ, ΑΘΔ ms. ζ : $\overline{AE} \overline{IA} \overline{OT}$ ms. C || 15 τμάματα Heiberg : τμήματα C om. ζ || 18 ΥΧ, ΓΝ Heiberg : ΥΚΓΝ ms. C pyq ζ || 19 ΑΘΔ Comm. : ΑΒΔ ms. C aod ζ || 23 ἀπολέλαπται Heiberg : ἀπείληπται C tangentes ζ || 24 ΝΓ, ΝΟ Heiberg : ΠΝ. Γ ὁ ms. C pno ζ || ἡ ΟΓ Heiberg : τῆς ΒΓ ms. C og post lac. ζ || 25 ἕκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Heiberg : om. C ex proportionem quam habet quae ζ.

au produit¹ du rapport de $\Lambda\Gamma$ à $\Lambda\Delta$ par le rapport de $\Lambda\Delta$ à $\Delta\Gamma$. Or $\Lambda\Gamma$ est à $\Lambda\Delta$ comme deux est à cinq ; car le rapport de TB à $B\Delta$ est égal au rapport de deux à cinq, et de même² le rapport de EB à BA et le rapport de ΔZ à ΔA , et, d'autre part, $\Lambda\Gamma$ est double³ de ΔZ , $\Lambda\Delta$ double de ΔA , et $\Lambda\Delta$ est à $\Delta\Gamma$ comme cinq est à un⁴ ; mais le produit du rapport de deux à cinq par le rapport de cinq à un est égal au rapport de deux à un ; il s'ensuit que $O\Gamma$ est double de $\Gamma\Xi$, et pour les mêmes raisons $\Pi\Upsilon$ est aussi double de $\Upsilon\Phi$. Mais comme $\Delta\Sigma$ est égal aux trois demis de KP , il est évident que $B\Sigma$ est l'excès de l'axe sur les trois demis du paramètre⁵.

Si maintenant le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur $B\Sigma$ au carré sur $B\Delta$, ou supérieur à ce rapport, le segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche pas le liquide, se dressera droit ; car on a montré plus haut⁶ qu'un segment, dont l'axe est supérieur aux trois demis du paramètre, et tel que le rapport de son poids à celui du liquide n'est pas inférieur au rapport du carré de l'excès de l'axe sur les trois demis du paramètre au carré de l'axe, prendra une position droite s'il est abandonné dans le liquide dans les conditions indiquées.

Mais si le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est inférieur au rapport du carré sur ΣB au carré sur $B\Delta$, et supérieur au rapport du carré sur $O\Xi$ au carré sur $B\Delta$, le segment, abandonné dans le

1. Cf. notes complémentaires.

2. Cf. Eucl. VI, 4.

3. Puisque $\Lambda\Gamma = \Lambda\Delta - \Lambda\Gamma = 2(\Lambda\Delta - \Lambda Z) = 2\Delta Z$.

4. On a en effet $\frac{T\Delta}{\frac{1}{2}B\Delta} = \frac{6}{5} = \frac{EZ}{H\Theta} = \frac{\Lambda\Gamma}{\Lambda\Delta}$.

5. Parce que $\frac{3}{2}KP = \frac{3}{2}BK - \frac{3}{2}BP = 3K\Delta - \frac{3}{2}BP = B\Delta - B\Sigma = \Delta\Sigma$; $B\Sigma = B\Delta - \Delta\Sigma = B\Delta - \frac{3}{2}KP$.

6. Cf. prop. 4.

- ΙΑ ποτὶ ΛΑ, καὶ ὃν ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ ΔΙ. Ἐχει δὲ καὶ ἁ ΛΙ
 ποτὶ ΛΑ ὃν δύο ποτὶ ε̄ · ἅ τε γὰρ ΤΒ ποτὶ ΒΔ ἐστὶν ὡς
 δύο ποτὶ ε̄, καὶ ἁ ΕΒ ποτὶ ΒΑ καὶ ἁ ΔΖ ποτὶ ΔΑ, τούτων
 δὲ διπλάσιαι αἱ ΛΙ, ΛΑ · ἁ δὲ ΑΔ ποτὶ ΔΙ ἔχει ὅσον πέντε
 5 πρὸς ᾱ, ὁ δὲ συγκεείμενος λόγος ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὰ δύο ποτὶ
 τὰ ε̄ καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὰ πέντε ποτὶ τὸ ἐν ὃ αὐτός ἐστι
 τῷ ὃν ἔχει τὰ δύο ποτὶ τὸ ᾱ · διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ΟΓ
 τῆς ΓΞ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἁ ΠΥ τῆς ΥΦ. Ἐπεὶ δὲ ἐστὶν
 ἁ ΔΣ ἡμιολία τῆς ΚΡ, δῆλον ὅτι ἁ ΒΣ ἁ ὑπεροχά ἐστὶν,
 10 ἧ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος.
 Εἰ μὲν οὖν τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν τοῦτον
 ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΣ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ,
 ἢ μείζονα τούτου τοῦ λόγου, ἀφεθὲν τὸ τμᾶμα εἰς τὸ
 ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἄπτεσθαι τοῦ
 15 ὑγροῦ, ὀρθὸν καταστασεῖται · δέδεικται γὰρ πρότερον
 ὅτι [ἐὰν] τμᾶμα μείζονα ἔχον τὸν ἄξονα ἢ ἡμιόλιον τῆς
 μέχρι τοῦ ἄξονος, ἐὰν τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν μὴ ἐλάσσονα
 λόγον ἔχη τοῦ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ὑπεροχᾶς,
 ἧ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος,
 20 ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν ἐς τὸ
 ὑγρὸν οὕτως ὡς εἴρηται, ὀρθὸν καταστασεῖται.
 Ἐπὴν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα
 μὲν λόγον ἔχη τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΣΒ ποτὶ τὸ τετρά-
 γωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, μείζονα δὲ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς
 25 ΟΞ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν

2 ἐστὶν ὡς C : habet proportionem quam sex ad quindecim
 hoc est quam 6 || 3 καὶ pr. C : et est ut quae cb ad bd ita 6 ||
 4 διπλάσιαι αἱ Heiberg : διπλῶς αἱ C dadz duplae seq. lac. 6 ||
 5 ᾱ Heiberg : μίαν C unum 6 || 7 ᾱ · διπλασία ἄρα Heiberg :
 ΑΔ ms. C unum, duplam autem proportionem habent duo ad
 unum, dupla ergo 6 || 9 ΔΣ ms. C : bis 6 || ὁ tert. om. C || 10 ἢ
 6 : om. C || 16 ἐὰν C 6 : del. Heiberg || 18 τὸ τετράγωνον τὸ
 Heiberg : tetragonum quod 6 || 20 τοῦ Heiberg : τῆς τοῦ C || 21
 ὡς 6 : om. C || 23 λόγον 6 : om. C || 25 ΟΞ ms. C : xt 6 || ποτὶ 6 :
 om. C.

liquide dans une position inclinée telle que sa base ne touche pas le liquide, se placera dans une position inclinée telle que sa base ne touche en aucun point la surface du liquide et que son axe fait avec la surface du liquide un angle supérieur à l'angle de sommet Ψ .

Si le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur ΞO au carré sur $B\Delta$, le segment, abandonné dans le liquide dans une position inclinée telle que sa base ne touche pas le liquide, se placera dans une position inclinée telle que sa base touche en un seul point la surface du liquide et que son axe fait avec la surface du liquide un angle égal à l'angle de sommet Ψ .

Si le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est inférieur au rapport du carré sur ΞO au carré sur $B\Delta$, et supérieur au rapport du carré sur $\Pi\Phi$ au carré sur $B\Delta$, le segment, abandonné dans le liquide en une position inclinée telle que sa base ne touche pas le liquide, se placera avec une inclinaison telle que sa base est coupée par le liquide sur une plus grande étendue.

Si le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur $\Pi\Phi$ au carré sur $B\Delta$, le segment, abandonné dans le liquide en une position inclinée telle que sa base ne touche pas le liquide, se placera avec une inclinaison telle que sa base touche en un seul point la surface du liquide, et que son axe fait un angle égal à l'angle de sommet Ψ .

κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἐν ἄπτεσθαι τὰς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ γωνίαν ποιεῖν ποτὶ τὰν
 5 ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ μείζονα τὰς ζ .

Ἐὰν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν τοῦτον ἔχη τὸν λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς $\Xi\Theta$ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς $B\Delta$, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ,
 10 καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ἄπτεσθαι καθ' ἐν τὰς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἴσαν τῇ ζ .

Ἐὰν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα
 15 μὲν λόγον ἔχη τοῦ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς $\Xi\Theta$ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς $B\Delta$, μείζονα δὲ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τὰς $\Pi\Phi$ ποτὶ τὸ ἀπὸ τὰς $B\Delta$, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον
 20 οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ κατὰ πλείονα τόπον τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ.

Εἰ δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς $\Pi\Phi$ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς $B\Delta$, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν καὶ
 25 τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ καθ' ἐν σαμείον ἄπτεσθαι τὰς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποιεῖν γωνίαν ἴσαν τῇ Ψ .

1 αὐτοῦ μὴ C : om. ζ || 3 μηδὲ καθ' ἐν Heiberg : μηδὲν καθ' ἐν C nihil ζ || 5 ζ ms. C : m ζ || 7 ὃν ζ : om. C || τὸ τετράγωνον C : om. ζ || 11 ἄπτεσθαι — 20 αὐτοῦ C : om. ζ || 13 ἴσαν Heiberg : εἴσην C || ζ Comm. : H ms. C || 20 τέμνεσθαι C : humectetur ζ || 22 τῷ ζ : πρὸς τούτῳ C || 25 μὴ ζ : καθ' ἐν σημείον C || 27 τὰς Heiberg : om. C || 28 ποιεῖν ζ : ποιεῖ C.

l'axe sur les trois demis du paramètre. Plaçons entre les sections coniques $\Lambda\Pi O\Lambda$ et $\Lambda\Xi\Delta$ un segment de droite NO , égal à Ψ' , qui coupe la conique restante en \mathfrak{A} et la droite $R\mathfrak{S}$ en B' ; on démontrera que $O\mathfrak{A}$ est double de $\mathfrak{A}N$ comme on a démontré que $M\mathfrak{S}$ est double de $\mathfrak{S}X$. Menons de O la tangente $O\mathfrak{S}$ à la parabole $APOL$ et la perpendiculaire OC à BD , et joignons A et N par la droite AN . Or AN et QN seront égaux entre eux. Du moment, en effet, que dans les segments semblables $APOL$ et AXD les droites AN et AQ ont été menées aux (sc. paraboles limitant les) sections et qu'elles font des angles égaux avec les bases, QA et AN auront le même rapport¹ avec LA et AD d'après la seconde figure; AN est donc égal à QN et parallèle à $O\mathfrak{S}$; il faut démontrer que le segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche le liquide en aucun point, prendra une position inclinée telle que sa base ne touche en aucun point la surface du liquide, et que son axe fait avec la surface du liquide un angle aigu supérieur à l'angle \mathfrak{S} .

Que le segment soit abandonné dans le liquide et s'y place de manière que sa base touche la surface du liquide en un seul point; que l'intersection du segment avec un plan passant par son axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole $APOL$; soit OA la trace du plan sécant dans la surface du liquide, et

1. La première figure de la proposition montre qu'on a $\frac{LN}{NA} = \frac{NO}{Oc}$ et, d'après Eucl. V, 18, $\frac{LA}{NA} = \frac{Nc}{Oc}$, et, de même, $\frac{DA}{NA} = \frac{Nc}{Xc}$, d'où, d'après Eucl. V, 7, coroll. et V, 22, $\frac{LA}{AD} = \frac{Xc}{Oc}$; pour les mêmes raisons, $\frac{QX}{XA} = \frac{XO}{Oc}$ ou, d'après Eucl. V, 18, $\frac{QA}{XA} = \frac{Xc}{Oc}$, ce qui correspond, sur la seconde figure, à $\frac{LA}{AD} = \frac{QA}{NA}$.

ἃ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος.
 Ἐναρμόσθω δέ τις μεταξύ τῶν ΑΠΟΛ, ΑΞΔ κώνων (τομᾶν),
 quae NO aequalis ipsi Ψ', et secet ipsa reliquam
 coni sectionem penes λ , ipsam autem Rς rectam
 5 penes Β' ; demonstrabitur autem quae Ο λ dupla
 ipsius λ N, sicut demonstrata est quae Μς ipsius
 ζX dupla, ab Ο autem ducatur quae Ος contingens
 sectionem ΑΠΟΛ, quae autem ΟC perpendicularis
 super BD, et ab Α ad Ν copuletur ; erunt autem
 10 quae ΑΝ, QN aequales inuicem. Quoniam enim in
 similibus portionibus ΑΠΟΛ, ΑΧΔ productae sunt a
 basibus ad portiones quae ΑΝ, ΑQ aequales angulos
 facientes ad bases, eandem proportionem habebunt
 quae QΑ, ΑΝ cum ipsis ΛΑ, ΑΔ propter secundam
 15 figuram praescriptarum ; aequalis ergo quae ΑΝ
 ipsi QΝ, et aequedistans ipsi Ος. Demonstrandum,
 quod dimissa in humidum ita, ut basis ipsius non
 secundum unum tangat <humidum, ita inclinata
 consistet, ut basis eius in nullo puncto superficiem
 20 humidi tangat, et> axis ad superficiem humidi
 angulum acutum faciat maiorem angulo ς.

Dimittatur enim et consistat ita, ut basis ipsius
 tangat secundum unum signum superficiem humidi,
 secta autem portione per axem plano recto ad super-
 25 ficiem humidi superficiei quidem portionis sectio sit
 quae ΑΠΟΛ, rectanguli coni sectio, superficiei autem
 humidi quae ΟΑ, axis autem [sectionis] et diameter

2 ΑΞΔ ms. C : azd λ || <τομᾶν> Heiberg || 4 Rς Heiberg :
 ρς λ || 6 Μς Heiberg : πς λ || 11 portionibus λ : sectionibus
 Nizzius || 12 portiones λ : sectiones Nizzius || 16 Ος Heiberg :
 ος λ || 18 <humidum — 20 tangat et> suppl. Comm. : om. λ . ||
 18 inclinata scripsi : inclinatum Comm. || 21 angulo ς Heiberg :
 excessu λ || 27 sectionis del. Heiberg.

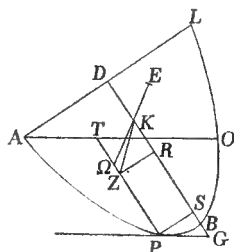


Fig. 108

BD l'axe et le diamètre de la parabole ; coupons BD par les points K et R comme il a été indiqué¹ et menons la droite PG, parallèle à OA et tangente à la parabole APOL au point P ; menons la parallèle PT à BD et la perpendiculaire PS à BD. Du moment donc que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur Ψ au carré sur BD, que le rapport (sc. du poids) du segment au (sc. poids du) liquide est égal au rapport de la partie immergée du segment au segment entier², et que, enfin, le rapport de la partie immergée au segment entier est égal³ au rapport du carré sur TP au carré sur DB, le segment de droite Ψ sera égal à TP. D'autre part, NO est égal à TP ; il s'ensuit que les segments APQ et APO sont à leur tour égaux entre eux³. Mais comme on a mené, dans les segments égaux et semblables APOL et AMQL, les droites OA et AQ à partir des extrémités des bases, et que les (sc. bases des) segments découpés font avec les diamètres des angles égaux, d'après les indications de la troisième figure, les angles de sommets \angle et G sont égaux, ainsi que les segments de droite \angle B et GB ; sont donc aussi égaux entre eux SR et CR,

1. C'est-à-dire de manière que $BK = 2KD$, et que $\frac{BD}{KR} = \frac{15}{4}$;

cf. le début de cette proposition.

2. Cf. prop. II, 1.

3. Cf. Sur les con. et les sphér., 24.

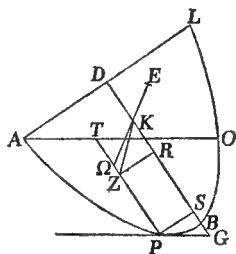


Fig. 108

quae BD, et secetur quae BD penes K, R, ut dictum
est. Ducatur autem et quae quidem PG aequedistanter
ipsi AO recta contingens sectionem APOL secundum
P, quae autem PT aequedistanter ipsi BD, quae
5 autem PS perpendicularis super BD, quoniam igitur
portio ad humidum in gravitate proportionem habet
quam tetragonum quod a Ψ' ad id quod a BD, quam
autem proportionem habet portio ad humidum,
hanc habet demersa ipsius portio ad totam, quam
10 autem demersa ad totam, tetragonum quod a TP
ad id quod a DB, erit quae Ψ' ipsi TP aequalis.
Et quae NO ergo ipsi TP aequalis est ; quare et
portiones APQ, APO invicem sunt aequales. Quoniam
autem in portionibus aequalibus et similibus APOL,
15 AMQL ab extremitatibus basium productae sunt
quae OA, AQ, et portiones ablatae faciunt ad
diametros angulos aequales propter tertiam figuram
praescriptarum, quare anguli qui apud ζ , G sunt
aequales, et quae ζ B, GB, ergo aequales sunt ; quare

13 APO Comm. : apf 𐤀 || 15 AMQL Comm. : ablk 𐤀 || 16
OA Heiberg : ao Comm. ta 𐤀 || 18 𐤀 Heiberg : Y ms. 𐤀 || 19
GB Heiberg : gb 𐤀.

et quae SR, CR et quae PZ, OB' et quae ZT, B'N. Quoniam minor est quam dupla quae OB' ipsius B'N, palam quod quae PZ ipsius ZT est minor quam dupla. Sit igitur quae PΩ ipsius ΩT dupla,
 5 et copulata quae KΩ educatur ad E ; totius quidem igitur centrum gravitatis erit K, eius autem portionis quae intra humidum centrum Ω, eius autem quae extra in linea KE ; et sit E. Quae autem KZ perpen-
 10 dicularis erit super superficiem humidi ; quare et quae per signa E, Ω aequidistanter ipsi KZ. Non ergo manet portio, sed reclinabitur, ut basis ipsius nec secundum unum tangat superficiem humidi, quoniam nunc secundum unum tacta ipsa reclinatur ;
 15 manifestum igitur quod portio consistet ita, ut axis ad superficiem humidi faciat angulum maiorem angulo ς.

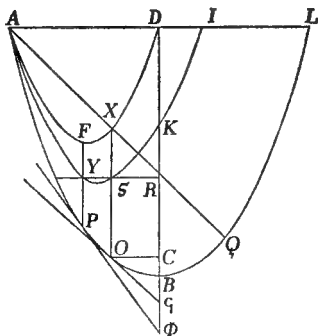


Fig. 109

Habeat autem portio ad humidum in gravitate hanc proportionem, quam habet tetragonum quod

1 OB' Heiberg : ος ζ || B'N Heiberg : ςknζ || 2 OB' Heiberg : οζ'ς ζ || 3 B'N Heiberg : ζζ nζ || 16 ς Heiberg : yζ.

XO au carré sur BD ; que le segment soit abandonné dans le liquide avec l'inclinaison indiquée¹. Que son intersection avec un plan passant par son axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole APOL ; soit OI la trace du plan sécant dans la surface du liquide, BD l'axe du segment et le diamètre de la parabole ; coupons BD comme plus haut² ; menons la droite PN, parallèle à IO et tangente à la parabole en P, la droite PT parallèlement à BD, et la perpendiculaire PS à BD. Il faut démontrer que le segment ne gardera pas l'inclinaison indiquée, mais qu'il s'inclinera jusqu'à ce que sa base touche la surface du liquide en un seul point.

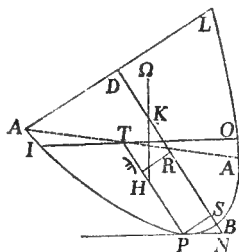


Fig. 110

Considérons les figures antérieures et les constructions de la figure tracée plus haut³ ; menons la perpendiculaire CO à BD, joignons A à X et prolongeons AX jusqu'au point Q ; AX sera égal à XQ ; menons la parallèle OQ à AQ. Du moment que par hypothèse le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur XO au carré sur BD, et que ce dernier rapport est aussi celui de la partie immergée

1. C'est-à-dire que la base ne touche la surface du liquide en aucun point.

2. Cf. le début de cette proposition.

3. Cf. la première figure dans le texte latin de cette prop.

ab XO ad id quod a BD, et dimittatur in humidum ita inclinata. Secta autem ipsa per axem plano recto ad superficiem humidi solidi quidem sectio sit quae APOL rectanguli conī sectio, superficiei autem
 5 humidi quae OL, axis autem portiois et diameter sectionis quae BD, et secetur quae BD ut prius, et ducatur quae quidem PN aequedistanter ipsi IO contingens sectionem secundum P, quae autem PT aequedistanter ipsi BD, quae autem PS perpendicularis super BD. Demonstrandum quod portio non
 10 manet inclinata sic, sed inclinatur, donec utique basis secundum unum signum tangat superficiem humidi.

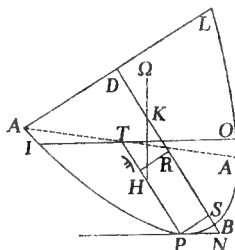


Fig. 110

Praeiaceant autem et quae in superiori figura prius disposita sunt, et quae CO perpendicularis ducatur
 15 super BD, et quae AX copulata educatur ad Q ; erit autem quae AX ipsi XQ aequalis ; et ducatur ipsi AQ quae OQ aequedistans. Et quoniam supponitur portio ad humidum in gravitate hanc habere proportionem, quam habet tetragonum quod ab XO ad
 20 id quod a BD, habet autem hanc proportionem et

du segment au segment entier¹, c'est-à-dire celui² du carré sur TP au carré sur BD, PT sera égal à XO, et comme dans les segments IBO et ABQ les diamètres sont égaux, ces segments sont égaux³. D'autre part, comme on a mené dans les segments égaux et semblables APOL et AOQL les droites AQ et IO, qui découpent des segments égaux, l'une d'une extrémité de la base, l'autre non d'une extrémité, il est évident que celle qui est menée de l'extrémité de la base fait avec le diamètre du segment entier un angle aigu plus petit ; et comme l'angle de sommet Ψ est inférieur à l'angle de sommet N, BC est supérieur à BS, et CR est inférieur³ à RS ; il s'ensuit que O Ψ est inférieur à P χ , et Ψ X supérieur à χ T. Comme, d'autre part, O Ψ est double de Ψ X, il est évident que P χ est supérieur au double de χ T. Soit donc PH double de HT ; joignons H à K et prolongeons la droite HK jusqu'à Ω . Dès lors, le segment entier aura pour centre de gravité le point K, la partie du segment immergée dans le liquide le point⁴ H, et la partie qui émerge du liquide aura son centre de gravité sur⁵ K Ω ; soit Ω ce centre. On démontrera comme précédemment⁶ que la droite K χ et les parallèles à K χ menées par les points H et Ω sont perpendiculaires à la surface du liquide. Il est donc évident que le segment ne restera pas en place, mais s'inclinera jusqu'à ce que sa base touche la surface du liquide en un seul point — comme nous allons le démontrer sur la troisième figure⁷, telle qu'elle est tracée dans le troisième cas⁸ de la proposition —, et que le segment gardera cette position.

1. Cf. prop. II, 1.

2. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.

3. On a en effet : $BC = B\Psi$, et $BS = BN$, d'après *Quadr. parab.*, 2 ; si l'angle de sommet Ψ est égal à l'angle de sommet N, $B\Psi$ est égal à BN, et si l'angle Ψ diminue, $B\Psi$ augmente, de façon que l'inégalité $\Psi < N$ entraîne l'inégalité $B\Psi > BN$, d'où $BC > BS$; de plus, $CR = BR - BC$; $RS = BR - BS$.

4. Cf. prop. II, 2.

5. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.

6-8. Cf. notes complémentaires.

demersa portio ad totam, hoc est quod \square TP ad id
 quod a BD, aequalis utique erit quae PT ipsi XO.
 Et quoniam portionum IBO, ABQ diametri sunt
 aequales, et portiones. Rursum quoniam in
 5 portionibus aequalibus et similibus APOL, AOQL
 productae sunt AQ, IO aequales portiones auferentes,
 hoc quidem ab extremitate basis, hoc autem non
 ab extremitate, palam quod minorem facit acutum
 angulum ad diametrum totius portionis, quae ab
 10 extremitate basis producta est. Et quoniam angulus
 qui apud ς est minor quam qui apud N, maior est
 quae BC quam BS, quae autem CR minor quam RS ;
 quare et quae O ς minor quam P λ , <et ς X>
 maior est quam λ T. Et quoniam quae O ς dupla
 15 est ipsius ς X, palam quod quae P λ maior est quam
 dupla ipsius λ T. Sit igitur quae PH dupla ipsius HT.

Καὶ ἐπέξεύχθω ἡ HK καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ω. Ἐσσεῖται
 δὴ τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κέντρον τοῦ βάρους τὸ K,
 τοῦ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ H, τοῦ δ' ἐκτὸς ἐπὶ τᾶς KΩ · ἔστω
 20 τὸ Ω. Δειχθήσεται δὴ ὁμοίως ἅ τε K λ κάθετος ἐπὶ τὰν
 τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν καὶ αἱ διὰ τῶν H, Ω σαμείων παρὰ
 τὰν K λ . Δῆλον οὖν ὅτι οὐ μενεῖ τὸ τμήμα, ἀλλ' ἐπι-
 κλιθήσεται, ἕως ἄν ἡ βάσις αὐτοῦ ἀπτηται καθ' ἐν
 25 σαμεῖον τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καθάπερ demonstra-
 bitur in tertia figura, quomodo se habet in tertio
 theoremate, et manebit portio ita consistens.

11 ς Heiberg : y λ || quam Comm. : om. λ || N Comm. : h
 λ || 13 O ς Heiberg : oy λ || P λ , <et ς X> Heiberg : pn (lac.
 4 litt.) μξτησ λ H ms. λ || 14 λ T Heiberg : dupla λ || O ς
 Heiberg : oy λ || 16 lac. 2 lin. || 20 K λ Heiberg : KT ms. C
 k λ λ || 21 αἱ Heiberg : quae λ om. C || 22 μενεῖ Heiberg :
 manebit λ μένει C || 23 ἀπτηται Heiberg : tangat λ ἀπτεται C
 || 24 post καθάπερ lac. 3 lin. in C.

en un seul point, et son axe fera avec la surface du liquide un angle égal à l'angle indiqué plus haut.

Que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide soit maintenant inférieur au rapport du carré sur NT^1 au carré sur BD , mais que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide soit égal au rapport du carré sur le segment Ψ' au carré sur BD ; or le segment de droite Ψ' est inférieur à TN . Intercalons donc de nouveau entre les segments AMD et $APOL$ un segment de droite PI mené parallèlement à BD et égal à Ψ' ; que PI coupe la parabole intermédiaire au point Y , et la droite XR au point H . On démontrera dès lors que PIY est double de YI , comme on a démontré² que GO est double de GX . Menons aussi la droite $\Pi\Omega$, tangente à la parabole $A\Pi O\Lambda$ au point Π , et la perpendiculaire ΠE à $B\Delta$, joignons I à A et prolongeons la droite IA jusqu'au point X ; la droite AI sera égale à IX , et la droite AX parallèle à $\Pi\Omega$. Il faut donc démontrer que le segment, abandonné dans le liquide avec une inclinaison telle que sa base ne touche pas le liquide, prendra une position inclinée telle que son axe fera avec la surface du liquide un angle inférieur à l'angle de sommet³ Φ , et que sa base ne touche la surface du liquide en aucun point.

1. Sc. NT sur la figure qui suit, mais PF ($\Pi\Phi$ dans le texte grec) sur la première figure de cette proposition II, 10.

2. Cf. plus haut dans cette proposition II, 10.

3. De sommet Ψ' sur la première figure de cette proposition.

ἐπιφανείας, καὶ ὁ ἄξων <τοῦ τμήματος> ποτὶ τὰν ἐπιφανείαν τοῦ ὑγροῦ ποιήσει γωνίαν ἴσαν τῇ προγεγραμμένῃ.

- Habeat etiam rursum portio ad humidum in gravitate proportionem minorem ea, quam habet
 5 tetragonum quod ab NT ad id quod a BD, quam autem proportionem habet portio ad humidum in gravitate, hanc habeat tetragonum quod a Ψ <ad tetragonum quod a BD> ; minor autem est quae Ψ quam TN. Rursum igitur inaptetur quaedam inter-
 10 media portionum AMD, APOL quae PI aequedistanter ipsi BD producta aequalis ipsi Ψ, secet autem ipsa intermediam coni sectionem penes Y, ipsam autem XR εὐθεῖαν κατὰ τὸ Η. Δειχθήσεται δὴ ἡ ΠΥ διπλασία τῆς ΥΙ, καθάπερ ἐδείχθη καὶ ἡ ΓΟ τῆς ΓΧ. Ἄχθω δὲ καὶ ἡ
 15 μὲν ΠΩ ἐφαπτομένα τῆς ΑΠΟΛ κατὰ τὸ Π, ἡ δὲ ΠΕ κάθετος ἐπὶ τὰν ΒΔ, καὶ ἡ ΙΑ ἐπιζευχθεῖσα <ἐκβεβλήσθω> ἐπὶ τὸ Χ· ἐσσεῖται δὲ ἡ ΑΙ τῇ ΙΧ ἴσα καὶ ἡ ΑΧ τῇ ΠΩ παράλληλος. Δεικτέον δὴ ὅτι τὸ τμήμα ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ
 20 ἄπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, οὕτως καταστασεῖται κεκλιμένον, ὥστε τὸν ἄξονα ποτὶ τὰν ἐπιφανείαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν <ἐλάσσονα τῆς Φ, τὰν δὲ βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἄπτεσθαι τῆς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

1 καὶ ὁ ἄξων <τοῦ τμήματος> Heiberg : et axis portionis χ || 3 — p. 61, 28 hoc loco, sed ex parte solum legi potest ; post p. 66, 10 collocat χ || 5 NT Heiberg : no χ || 7-8 <ad tetragonum quod a BD> Comm. : om. χ || 9 TN Heiberg : on χ || 13 δὴ Heiberg : δὲ C autem χ || διπλασία Heiberg : διπλῇ C || 14 ΓΧ Comm. : ΓΝ ms C gh χ || 16 ΙΑ Heiberg : $\overline{\Delta}$ ms. C ai χ || <ἐκβεβλήσθω> Heiberg : ducatur χ om. C || 17 δὲ — 18 δεικτέον Heiberg : uestigia solum in C autem quae ai ipsi iq aequalis et quae aq ipsi pq aequae distans demonstrandum est χ || 18 ὅτι Heiberg : quod χ ἐστὶν C || 22 <ἐλάσσονα — 2 p. 60 βάσιν> (5 lineae legi nequeunt in C) Heiberg : minorem angulo f, basis autem ipsius neque secundum unum tangat superficiem humidi, dirimitur enim in humidum et consistat ita ut basis χ .

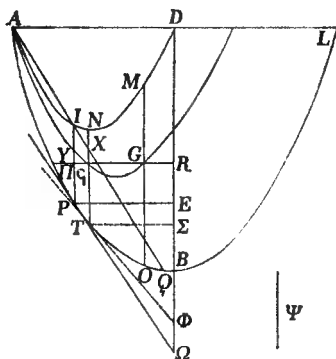


Fig. 112

Que le segment soit abandonné dans le liquide et s'y place de manière que sa base touche la surface du liquide en un seul point ; que son intersection avec un plan passant par son axe et perpendiculaire à la surface du liquide soit la parabole $AHB\Delta^1$; soit AZ la trace du plan sécant dans la surface du liquide, $B\Delta$ l'axe et le diamètre de la parabole ; coupons $B\Delta$ par les points K et P comme nous l'avons fait plus haut², menons la droite HI , parallèle à AZ et tangente à la

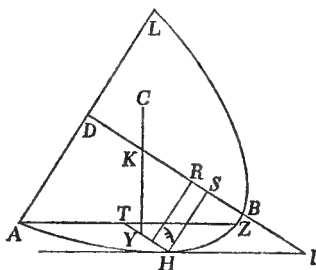


Fig. 113

1. Cf. la figure suivante.

2. C'est-à-dire de manière que $BK = 2KA$ et $\frac{BA}{KP} = \frac{15}{4}$.

parabole au point H, la droite HT parallèle à BD, et la droite HS perpendiculaire à BD. Du moment que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur Ψ' au carré sur BD, et que le rapport entre le poids du segment au poids du liquide est égal au rapport du carré sur HT au carré sur BD pour les mêmes raisons que plus haut¹, il est évident que HT est égal² à Ψ' ; il s'ensuit que les segments AHZ et APQ sont à leur tour égaux³. Puisque, d'autre part, on a mené, dans les segments égaux et semblables APOL et AHZL, à partir des extrémités des bases les droites AQ et AZ qui découpent des segments égaux, il est évident que ces droites font des angles égaux avec les diamètres des segments. Mais aussi dans les triangles HIS et PQE les angles de sommets I et Ω sont égaux ; il s'ensuit que les segments de droite SB et EB seront aussi égaux ; seront donc égaux entre eux aussi SR et ER, H γ et PH, γ T et HI. Comme, d'autre part, PY est double de Υ I, il est évident que H γ est inférieur⁴ au double de γ T. Soit donc HY double de Υ T ; joignons les points Y, K et C et prolongeons la droite YKC ; le centre de gravité du segment entier est le point K, celui de la partie immergée dans le liquide⁵ le point Υ , et le centre de gravité de la partie qui émerge du liquide est situé sur la droite KC ; soit C ce centre⁶. En vertu de la proposition qui précède, il est manifeste que le segment ne reste pas en place, mais prendra une inclinaison telle que sa base ne touche la surface du liquide en aucun point.

Nous allons démontrer maintenant que la position prise par le segment sera telle que son axe fera avec la surface du liquide un angle inférieur à l'angle de

1. Cf. prop. II, 1.

2. Cf. Eucl. V, 9.

3. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 24.

4. On a, en effet, $PH < 2HI$; $PH = H\gamma$; $HI = \gamma T$.

5. Cf. prop. II, 2.

6. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.

superioribus, ducatur autem et quae HI aequedistanter ipsi AZ contingens sectionem coni penes H, quae autem HT aequedistanter ipsi BD, quae autem HS perpendicularis super BD. Quoniam igitur portio
 5 ad humidum in gravitate hanc habet proportionem, quam habet tetragonum quod a Ψ ad id quod a BD, quam autem proportionem habet portio ad humidum in gravitate, hanc habet tetragonum quod ab HT ad id quod a BD propter eadem prioribus,
 10 palam quod quae HT est aequalis ipsi Ψ ; quare et portiones AHZ, APQ sunt aequales. Et quoniam in portionibus aequalibus et similibus APOL, AHZL ab extremitatibus basium sunt productae quae AQ, AZ aequales portiones auferentes, palam quod
 15 aequales faciunt angulos ad diametros portionum. Adhuc autem et trigonorum HIS, Ω E aequales sunt anguli qui apud I, Ω ; erunt <igitur> et SB, EB aequales; quare et quae SR, ER aequales et quae H γ , PH et quae γ T, HI. Et quoniam est dupla
 20 quae PY ipsius YI, manifestum quod minor est quam dupla quae H γ ipsius γ T. Sit igitur quae HY dupla ipsius YT, et copulata protrahatur quae YKC; sunt autem centra gravitatum totius quidem K, eius autem quod intra humidum Y, eius autem quod
 25 extra in linea KC; et sit C. Erit autem propter praecedens theorema hoc manifestum quod non manet portio, sed inclinabitur ita, ut basis ipsius nec secundum unum tangat superficiem humidi.

Quod autem consistet ita, ut axis ipsius ad super-
 30 ficiem humidi faciat angulum minorem angulo Φ

11 AHZ Comm. : amz \mathcal{L} || 12 AHZL Comm. : akhl \mathcal{L} || 17 <igitur> Heiberg || 19 H γ , PH Heiberg : hn, yh \mathcal{L} || 21 HY Comm. : ny \mathcal{L} .

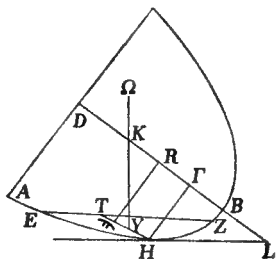


Fig. 114

demonstrabitur. Consistat enim, si possibile est, ita, ut faciat angulum non minorem angulo Φ , et alia

〈カテ-〉

σκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ τρίτῳ σχήματι. Ὅμοίως δὴ

5 δειχθήσεται ἡ ΘH ἴσα τῇ Ψ · ὥστε καὶ τῇ $\text{I}\Pi$ ἴσα. Ἐπεὶ
οὖν ἡ Λ γωνία οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς Φ , οὐκ ἄρα μείζων
ἐστὶν ἡ ΓB τῆς ΣB , οὐδὲ ἡ ΓP ἐλάσσων τῆς ΣP οὐδὲ ἡ
 $\text{H}\chi$ τῆς $\Theta\varsigma$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $\text{I}\Pi$ ἡμιολία ἐστὶ τῆς $\text{P}\Upsilon$, ἐλάσσων
δὲ ἡ $\text{P}\Upsilon$ τῆς $\Theta\varsigma$, καὶ ἡ μὲν $\text{H}\Theta$ ἴσα τῇ PI , ἡ δὲ $\text{H}\chi$ οὐκ
10 ἐλάσσων τῆς $\Theta\varsigma$, μείζων ἔσται ἡ χH τῆς $\text{P}\Upsilon$ · ἡ ἄρα $\text{H}\chi$
μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία τῆς $\chi\Theta$. Ἔστω δὴ ἡ $\text{H}\Upsilon$ διπλασία
τῆς $\Upsilon\Theta$, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΥK ἐκβεβλήσθω · δηλον δὴ
ὁμοίως τοῖς πρότερον ὅτι οὐ μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλὰ κλιθή-
σεται, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν (τοῦ
15 ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἐλάσσονα τῆς Φ).

3 <κατε> Heiberg || 4 δὴ Heiberg : δὲ C_z || 5 ΘΗ ms. C : tm
 z || ΙΠ ms. C : ih z || ἴσα om. z || 6 ἄ Λ γωνία οὐκ C : hlz || 7
 ΓΡ ms. C : Ϛr z || ἐλάσσων Comm. : om. C_z || τᾶς alt. z : τηι C ||
 8 ΘϚ Heiberg : ΘΓ ms. C og z || ΙΠ ms. C : ih z || ΙΥ ms. z :
 ϚϚ ms. C || 9 ΘϚ ms. C : go z || ΗΘ ms. C : ht z || ἴσα Heiberg :
 ἴση C aequalis est z || ΙΙΙ Heiberg : ΗΙ ms. C pc z || 10 ΘϚ Hei-
 berg : Γ ms. C og z || ἔσται C : ergo z || 13-14 κλιθήσεται
 Heiberg : κλήθησεται C uoluetur z || 14 <τοῦ — 15 τᾶς Φ>
 Heiberg : legi non potest in C humidi faciat angulum mino-
 rem angulo f z.

De la même manière on démontrera que, si le rapport entre le poids d'un segment et celui du liquide est égal au rapport du carré sur NT au carré sur BD, ce segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche pas la surface du liquide, prendra une position inclinée telle que sa base touchera la surface du liquide en un seul point, et que son axe fera avec la surface du liquide un angle égal à l'angle de sommet Φ .

Que le rapport entre le poids du segment et celui du liquide soit donc de nouveau supérieur¹ au rapport du carré sur ZΠ au carré sur BΔ, et inférieur au rapport du carré sur EO au carré sur BΔ, et que le rapport entre le poids du segment à celui du liquide soit égal au rapport du carré sur Ψ au carré sur BΔ; il est, dès lors, évident² que Ψ est supérieur à ZΠ et inférieur à EO. Intercalons donc entre les paraboles AΞΔ et ΑΠΟΛ le segment de droite ΦΙ, égal à Ψ et parallèle à BΔ; il coupe la parabole intermédiaire au point Υ; on démontrera de nouveau que ΦΥ est double de ΥΙ, comme (sc. on a démontré³ que) ΟΓ est double de ΞΓ. Menons du point Φ la droite ΦΩ, tangente à la parabole ΑΠΟΛ en Φ; on démontrera donc comme plus haut³ que ΑΙ est égal à ΧΙ et que ΑΧ est parallèle à ΦΩ. Il faut démontrer que le segment, abandonné dans le liquide de manière que sa base ne touche pas la surface du liquide, et mis dans une position inclinée, s'inclinera de manière que sa base soit coupée par le liquide sur une plus grande étendue.

1. Ceci est possible, parce que, d'après la première figure de la prop. II, 10, $GO > PY$, $OΞ = \frac{3}{2} GO$, et $PF = \frac{3}{2} PY$; sur la figure qui suit, le segment de droite ZP est le même que le segment PF sur la première figure.

2. Cf. Eucl. V, 10.

3. Plus haut, dans la même prop. II, 10.

Similiter autem demonstrabitur <quod> et, si portio ad humidum in gravitate habeat proportionem eandem, quam tetragonum quod ab NT ad id quod a BD, dimissa in humidum ita, ut basis ipsius non
 5 tangat superficiem humidi, consistet inclinata ita, ut basis ipsius secundum unum signum tangat superficiem humidi, et axis ipsius ad superficiem humidi faciat angulum aequalem angulo qui apud Φ.

Ἐστω δὴ πάλιν τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸ ὑγρὸν τῷ βάρει
 10 μείζονα μὲν λόγον ἔχον τοῦ ὄν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΠ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἐλάσσονα δὲ τοῦ ὄν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΘ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ὄν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν, τοῦτον ἐχέτω τὸ ἀπὸ τᾶς Ψ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ.
 15 δῆλον οὖν ὅτι ἡ Ψ τᾶς μὲν ΖΠ μείζων ἐστίν, τᾶς δὲ ΞΘ ἐλάσσων. Ἐναρμόσθω δὴ εἰς τὸ μεταξὺ τὰν ΑΞΔ, ΑΠΟΛ [τμημάτων] ἴσα τῇ Ψ, παράλληλος δὲ τῇ ΒΔ ἡ ΦΙ τέμνουσα τὰν μεταξὺ [τοῦ] κώνου τομὰν κατὰ τὸ Υ· πάλιν δὴ ἡ ΦΥ διπλασία τᾶς ΥΙ δειχθήσεται, καθάπερ ἡ ΟΓ τᾶς
 20 ΞΓ. Ἀχθῶ δὲ ἀπὸ τοῦ Φ τοῦ ΑΠΟΛ ἐφαπτομένα κατὰ τὸ Φ ἡ ΦΩ· ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἡ μὲν ΑΙ τῇ ΧΙ ἴσα, ἡ δὲ ΑΧ τῇ ΦΩ παράλληλος. Δεικτέον δὲ ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν, ὥστε τὰν βάσιν μὴ ἄπτεσθαι τᾶς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καὶ τεθὲν κεκλιμένον
 25 οὕτως κλιθήσεται, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ κατὰ πλείονα τρόπον τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ.

1 — p. 66, 10 hoc loco in C, post p. 59, 3 in ζ || 1 quod om. ζ || 3 NT Heiberg : h'p ζ || 9 Ἐστω C : habeat ζ || 14 ἐχέτω C : habeat ζ || 16 τὸν C || ΑΞΔ, ΑΠΟΛ ms. C : apol a (lac.) d ζ || 17 [τμημάτων] Cζ : del. Heiberg || 18 [τοῦ] del. Heiberg || 19 διπλασία ζ : ΔΙ ms. C || 19-20 τᾶς ΞΓ ms. C : ipsi xy ζ || 24 τᾶς ἐπιφανείας Heiberg : φανείας C om. ζ || 26 τέμνεσθαι C humectetur ζ.

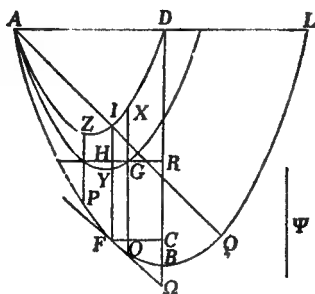


Fig. 115

Ἀφείσθω γὰρ εἰς τὸ ὑγρόν ὡς εἴρηται, καὶ κείσθω τὸ
 πρῶτον [καὶ] οὕτως κεκλιμένον, <ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ
 μηδὲ καθ' ἐν> ἄπτεσθαι τὰς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, τμαθέντος
 δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ ποτὶ τὰν τοῦ
 5 ὑγροῦ ἐπιφάνειαν ἐν μὲν τῇ τοῦ τμάματος ἐπιφανείᾳ
 γίνεται τομὰ ἡ ABΓ, ἐν δὲ τῇ τοῦ ὑγροῦ ἡ EZ, ἄξων δὲ
 ἔστω [τῆς τομῆς] καὶ διάμετρος [τοῦ τμήματος] ἡ ΒΔ,
 καὶ τετράσθω ἡ ΒΔ κατὰ τὰ Κ, Ρ ὁμοίως τοῖς πρότερον,
 ἄχθω δὲ καὶ ἡ μὲν ΗΛ παρὰ τὰν EZ ἐφαπτομένα τὰς
 10 [ἀπὸ τῆς] ABΓ τομᾶς κατὰ τὸ Η, ἡ δὲ ΗΘ παρὰ τὰν
 ΒΔ, ἡ δὲ ΗΣ κάθετος ἐπὶ τὰν ΒΔ. Ἐπεὶ δὲ τὸ τμάμα τῷ
 βάρει λόγον ἔχει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν τὸ ἀπὸ τὰς Ψ τετρά-
 γωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τὰς ΒΔ, δῆλον ὅτι ἡ Ψ ἴσα ἐστὶν τῇ
 ΗΘ · δειχθήσεται γὰρ ὁμοίως τοῖς πρότερον · ὥστε καὶ
 15 ἡ ΗΘ ἴσα ἐστὶν τῇ ΦΙ · καὶ τὰ τμάματα ἄρα τὰ ΑΦΧ,
 ΕΒΖ ἴσα ἐστὶν ἀλλάλοις. Ἐπεὶ δ' ἐν ἴσοις καὶ ὁμοίοις
 τμαμάτεσσι τοῖς ΑΠΟΛ, ABΓ ἀγμέναι ἐντὶ αἱ ΑΧ, ΕΖ

2 [καὶ] C : om. \mathcal{L} || 2 <ὥστε — 3 καθ' ἐν> Heiberg : ut
 basis ipsius neque secundum unum \mathcal{L} || 4 ὀρθῶ om. C : recto
 \mathcal{L} || 7 τῆς τομῆς C \mathcal{L} : del. Heiberg || τοῦ τμήματος C \mathcal{L} : del.
 Heiberg || 10 ἀπὸ τῆς C : om. \mathcal{L} del. Heiberg || κατὰ \mathcal{L} : κα
 C || 11 ἐπεὶ \mathcal{L} : ἐπὶ C || 16 ἐπεὶ \mathcal{L} : ἐπὶ C || δ' C : om. \mathcal{L} .

découpent des segments égaux, l'une de l'extrémité de la base, l'autre d'un point autre que l'extrémité, celle qui a été menée de l'extrémité de la base fera avec le diamètre du segment un angle aigu plus petit¹. Comme, d'autre part, l'angle Λ du triangle $H\Lambda\Sigma$ est supérieur² à l'angle Ω du triangle $\Phi T\Omega$, il est évident que $B\Sigma$ est inférieur à BT , que ΣP est supérieur à PT , et que $H\mathfrak{A}$ est supérieur à ΦH , d'où il suit que $\mathfrak{A}\Theta$ est inférieur à HI . Comme, d'autre part, ΦY est double de YI , il est évident que $H\mathfrak{A}$ est supérieur³ au double de $\mathfrak{A}\Theta$. Soit donc HA' double de $A'\Theta$; il est, dès lors, évident, d'après ces propriétés, que le segment ne restera pas dans sa position, mais s'inclinera jusqu'à ce que sa base touche la surface du liquide en un seul point.

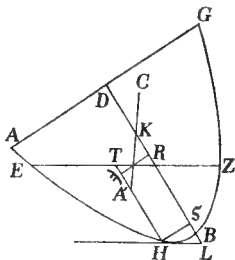


Fig. 116

Qu'elle la touche donc en un seul point, comme le montre la troisième figure⁴; construisons le reste comme précédemment; on démontrera ainsi de nouveau que ΘH est égal à ΦI et que les segments $A\Phi X$ et ABZ sont égaux entre eux; comme, d'autre part, dans les segments égaux et semblables $A\pi O\Lambda$ et $AB\Gamma$ on a mené les droites AX et AZ qui découpent des segments égaux, ces droites font des angles égaux avec les

1. Cf. une des notes antér. de cette prop.

2. Cf. Eucl. I, 39.

3. Puisque $\Phi H > 2HI$; $H\mathfrak{A} > \Phi H$; $\mathfrak{A}\Theta < HI$.

4. C'est-à-dire la dernière figure, 117, de la prop. II, 10.

diamètres des segments¹; il s'ensuit que dans les triangles $\Lambda H\Sigma$ et $\Phi T\Omega$ les angles de sommets Λ et Ω sont égaux, et que sont égaux les segments de droite $B\Sigma$

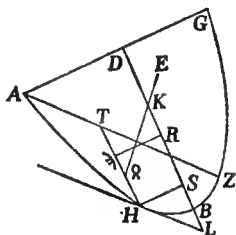


Fig. 117

et BT , ΣP et PT , $H\gamma$ et ΦH , $\gamma\Theta$ et HI . Mais comme ΦY est double de YI , il est manifeste que $H\gamma$ est supérieur¹ au double de $\gamma\Theta$. Soit donc $H\gamma$ double de $\gamma\Theta$; il est dès lors de nouveau évident, d'après ces relations, que le segment ne restera pas dans sa position, mais s'inclinera du côté du point A . Dès lors, comme on a supposé que le segment touche le liquide en un seul point, il est évident que sa base sera submergée par le liquide sur une plus grande étendue.

1. Cf. les notes antérieures.

STOMACHION

NOTICE

Ce traité est sans doute authentique, puisqu'il est mentionné par Marius Victorinus¹, Atilius Fortunatianus² et Ausonius³, mais à classer parmi les *Scripta minora*. L'analyse géométrique s'y exerce sur un jeu de patience consistant à « paver » une plaque carrée ou rectangulaire au moyen de quatorze lamelles d'ivoire affectant des formes de triangles ou de polygones. Archimède n'est pas l'inventeur de ce jeu, mais il a essayé, à en juger d'après les fragments conservés, de le hausser au niveau d'un problème de géométrie en postulant que les aires des lamelles soient multiples les unes des autres.

Il existe, jusqu'à présent, deux fragments du texte de cet opuscule, dont le premier, en grec, fut retrouvé par Heiberg dans le palimpseste de Jérusalem. Le second fragment fut découvert, dans un manuscrit arabe, par l'orientaliste H. Suter, qui en publia une traduction⁴ en 1899.

Nous faisons suivre dans cette édition le texte grec, relatif à la première partie du traité, de la traduction allemande de la version arabe de H. Suter.

1. *Ars grammatica*, éd. O. Keil, Leipzig, 1871, t. VI, p. 100.

2. Cf. *Grammatici latini ueteres*, éd. Putschius, p. 2684.

3. *Ausoni opuscula*, éd. R. Reiper, Leipzig, 1886, p. 208.

4. *Der locus Archimedeus oder das Syntemachion des Archimedes*, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, t. IX, 1899, p. 491-500.

LE STOMACHION D'ARCHIMÈDE

Comme le jeu appelé Stomachion offre une étude variée de la transposition des figures dont il se compose, j'ai cru nécessaire de traiter d'abord <des différentes parties> dans lesquelles il est divisé ainsi que des figures auxquelles ces parties peuvent, chacune, être comparées ; j'ai, de plus, indiqué les angles qui, pris deux à deux, , pour connaître les arrangements des figures engendrées par ces parties, soit que les côtés qui apparaissent dans ces figures soient alignés, soit qu'ils s'écartent un peu de l'alignement sans qu'on s'en aperçoive ; car des arrangements de ce genre relèvent de l'adresse, et si ces côtés s'écartent légèrement sans que la vue s'en aperçoive, les figures qui sont composées ne sont pas à rejeter pour autant.

Il est donc possible <de composer> de ces parties un grand nombre de figures parce qu' <il est loisible> de transposer telle partie dans un autre endroit, occupé par une figure égale et semblable, et de lui en substituer une autre. Comme il arrive quelquefois que deux figures prises ensemble soient équivalentes à une seule figure et semblables à une seule figure, ou que deux figures prises ensembles soient égales et semblables à deux figures prises ensemble, un plus grand nombre encore de figures sont composées par la transposition. Nous commençons par exposer une proposition se rapportant à cette question.

ΣΤΟΜΑΧΙΟΝ

Ἀρχιμήδους Στομάχιον

Τοῦ λεγομένου Στομαχίου ποικίλαν ἔχοντος τᾶς ἐξ
ῶν συνέστακε σχημάτων μεταθέσεως θεωρίαν ἀναγκαῖον
ἡγησάμεν πραττον του <.....> ρῶν ἐκθέσθαι, εἰς τε ᾧ
5 διαιρεῖται, ἕκαστόν τε αὐτῶν τίνι ἐστὶν ὁμοιούμενον,
ἔτι δὲ καὶ ποῖαι γωνίαι σύνδυο λαμβανόμεναι <....> καὶ
<...> θᾶς, εἴρηται πρὸς τὸ τὰς ἐναρμόσεις τῶν ἐξ αὐτῶν
γεννωμένων σχαμάτων γινώσκεισθαι, εἴτε ἐπ' εὐθείας
εἰσὶν αἱ γεννώμεναι ἐν τοῖς σχάμασι πλευραί, εἴτε καὶ
10 μικρῶς λείπουσαι τῇ θεωρίᾳ λανθάνουσιν · τὰ γὰρ τοιαῦτα
φιλότεχνα · καὶ ἐὰν ἐλάχιστον μὲν λείπηται, τῇ δὲ θεωρίᾳ
λανθάνῃ, οὐ παρὰ τοῦτ' ἐστὶν ἐκβλητα ᾧ συνίσταται.

Ἔστι μὲν οὖν ἐξ αὐτῶν οὐκ ὀλίγων σχημάτωνο..
διὰ τὸ.....ν..τον εἶναι εἰς ἕτερον τόπον τοῦ ἴσου καὶ
15 ἰσογωνίου σχάματος μετατιθεμε... καὶ ἐτέ..... λαμβάνοντας.
<Ἐνιό>τε δὲ καὶ δύο σχημάτων συνάμφω ἐνὶ σχήματι
ἴσων ὄντων καὶ ὁμοίων τῷ ἐνὶ σχήματι ἢ καὶ δύο σχημάτων
συνάμφω ἴσων τε καὶ ὁμοίων ὄντων δυσὶ σχήμασι συνάμφω
πλείονα σχήματα συνίσταται ἐκ τῆς μεταθέσεως. Προγρά-
20 φομεν οὖν τι θεώρημα εἰς αὐτὸ συντεῖνον.

6 σύνδυο : συν. διοιο C || 7 <...> requiritur <ποιοῦσι δύο
ὄρ> θᾶς Heiberg || 10 λείπουσαι Heiberg : λιποῦσαι C || 11
λείπηται Heiberg : λίπηται C || 14 τόπον Heiberg : τόπου C || 16
σημάτων Heiberg : σχήματα C || 19-20 προγράφομεν Heiberg :
προγραφόμενον C.

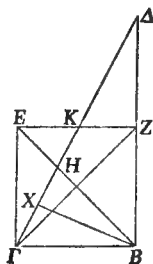


Fig. 118

Soit, en effet, le parallélogramme rectangulaire¹ $Z\Gamma$; que le côté EZ <soit divisé en deux parties égales> par le point K ; menons des points Γ et B les droites ΓK , BE <et ΓZ > ; prolongeons ΓK et BZ jusqu'à leur point de rencontre Δ ... Comme EK est égal à KZ , ΓE , c'est-à-dire BZ , est égal à $Z\Delta$; ΓZ est, par conséquent, supérieur à $Z\Delta$; il s'ensuit² que l'angle $Z\Delta\Gamma$ est supérieur à l'angle $Z\Gamma\Delta$. Mais les angles $H\Delta B$ et $Z\Gamma B$ sont égaux, puisque chacun d'eux est égal à la moitié d'un angle droit ; l'angle $\Gamma H B$ est donc à son tour supérieur à l'angle $H\Gamma B$, parce que l'angle $\Gamma H B$ est égal à la somme des angles intérieurs opposés³ $H\Delta B$ et $H\Delta B$, d'où il suit⁴ que ΓB est supérieur à BH . Si on divise, dès lors, ΓH en deux parties égales par le point X , l'angle $\Gamma X B$ sera obtus ; car du moment que ΓX est égal à XH et que XB est en commun, deux côtés sont égaux chacun à chacun, et la base ΓB est supérieure à la base BH ; il s'ensuit⁵ que l'angle est supérieur à l'angle. L'angle $\Gamma X B$ est donc obtus, et l'angle adjacent est aigu. Or l'angle $\Gamma B H$ est égal à la moitié d'un angle droit, puisqu'on avait supposé

1. Il s'agit plutôt d'un carré ; les figures, inexactes et incomplètes dans le manuscrit, ont été refaites d'après le texte par Heiberg et P. Heegaard.

2. Cf. Eucl. I, 18.

3. Cf. Eucl. I, 32.

4. Cf. Eucl. I, 19.

5. Cf. Eucl. I, 25.

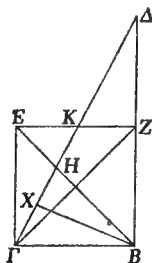


Fig. 118

- Ἐστω γὰρ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΓ,
καὶ δε. ι.....ω ἡ ΕΖ τῷ Κ, καὶ.. διήχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ, Β
αἱ ΓΚ, ΒΕ. εἰ..ων... τῶν... Γ ἐκ<βεβλή>σθωσαν αἱ
ΓΚ, ΒΖ καὶ συμπιπτέ<τωσαν κατὰ τὸ Δ.....> ἡ ΓΗ. Ἐπεὶ
5 ἴση ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΚΖ, <ἴση> καὶ ἡ ΓΕ, τουτέστιν ἡ ΒΖ,
τῇ ΖΔ · ὥ<στε> μείζων ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ · καὶ γωνία <ἄρα>
ἡ ὑπὸ τῶν ΖΔΓ τῆς ὑπὸ τῶν ΖΓΔ μείζων. ἴσαι δὲ εἰσιν
αἱ ὑπὸ ΗΒΔ, ΖΓΒ · ἡμίσεια γὰρ ὀρθῆς ἑκατέρα · μείζων
ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΓΗΒ, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση δυσὶ ταῖς
10 ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΗΒΔ, ΗΔΒ, τῆς ὑπὸ τῶν
ΗΓΒ · ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΓΒ τῆς ΒΗ. Ἐὰν ἄρα δίχα
τμηθῇ ἡ ΓΗ κατὰ Χ, ἔσται ἀμβλεία μὲν ἡ ὑπὸ ΓΧΒ ·
ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ ΓΧ τῇ ΧΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΧΒ, δύο δυσὶν ἴσαι ·
καὶ βάσις ἡ ΓΒ τῆς ΒΗ μείζων · καὶ ἡ γωνία ἄρα τῆς
15 γωνίας μείζων. Ἀμβλεία μὲν ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΧΒ, ὀξεία δὲ
ἡ ἐφεξῆς. Ἡμίσεια δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΓΒΗ · τοῦτο γάρ
ἐστὶν ὑποκείμενον τοῦ παραλληλογράμμου · ὀξεία δὲ ἡ
ὑπὸ ΒΧΗ. Καὶ.τι δὴ ἴση ἡ λοιπαὶ ΓΒΗ καὶ συνίσταται
καὶ διαιρεῖται τοῦτο ἐπ. ον τον.... βάσιος..τι.....
20 αστ..α.. ἄρα ο... ΑΒ....αν..ο...τὴν ΓΑ..... νῶν..... ἔχον...τὸ

cela pour le parallélogramme, et l'angle BXH est aigu. Et... cette figure se compose et se décompose...

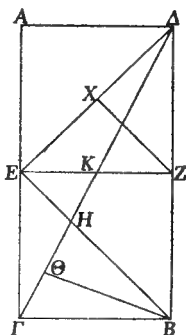


Fig. 119

Divisons ΓA en deux parties égales par le point E et menons par E la parallèle EZ à $B\Gamma$; les quadrilatères ΓZ et ZA sont donc des carrés. Menons les diagonales $\Gamma\Delta$, BE et $E\Delta$; divisons ΓH et $E\Delta$ en deux parties égales par les points Θ et X , menons les droites $B\Theta$ et XZ , et menons par les points ..., K les parallèles $K...E$ à $B\Delta$. D'après la proposition qui précède, l'angle Θ dans le triangle $B\Gamma\Theta$ est donc obtus, et l'angle qui reste est aigu... or il est évident...

Le livre d'Archimède sur la division de la figure appelée Stomachion en quatorze figures partielles qui sont en rapport avec elle.

Décrivons un parallélogramme, soit $ABGD$; divisons BG en deux parties égales par le point E , élevons la perpendiculaire EZ à BG , menons les diagonales AG , BZ et ZG , divisons aussi BE en deux parties égales par le point H , et élevons la perpendiculaire HT à BE ; plaçons ensuite une règle au point H , orientons-la

- den Punkt H und visieren nach dem Punkt A und ziehen HK, halbieren AL in M und ziehen BM, so ist das Rechteck AE in sieben Teile geteilt. Hierauf halbieren wir GD in N, ebenso ZG in C, ziehen EC, 5 legen das Lineal an die Punkte B und C an und ziehen CO, ziehen noch CN, so ist auch das Rechteck ZG in sieben Teile, aber auf andere Weise als das erste, geteilt, mithin das ganze Quadrat in vierzehn Teile.

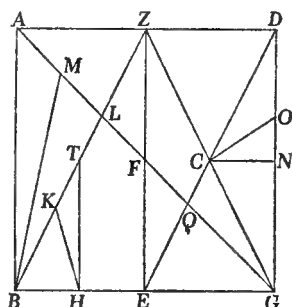


Fig. 120

- Wir beweisen nun, dass jeder der vierzehn Teile 10 zum ganzen Quadrat in rationalem Verhältnis stehe.

- Weil ZG die Diagonale des Rechtecks ZG ist, so ist Dreieck DZG die Hälfte dieses Rechtecks, also $1/4$ des Quadrates. Aber Dreieck GNC ist $1/4$ von Dreieck DZG, weil, wenn wir EC verlängern, es 15 in den Punkt D trifft, und dann also Dreieck GDC die Hälfte des Dreiecks DZG und gleich den beiden Dreiecken GNC und DNC zusammen ist; also ist Dreieck GNC = $1/16$ des Quadrats. Wenn wir nun ferner annehmen, die Linie OC sei nach dem 20 Punkte B gerichtet, wie sie in der Tat auch gezeichnet wurde, so ist die Linie NC parallel zur Seite BG

OBG, d'où il résulte¹ que BG est à NC comme GO est à NO. Or BG est le quadruple de NC, et, par conséquent, GO est le quadruple de NO ; il s'ensuit que GN est le triple de NO, et que le triangle GNC est le triple² du triangle ONC. Mais puisque, comme nous l'avons montré, le triangle GNC est le seizième du carré, le triangle ONC est le quarante-huitième du carré, de manière qu'il reste pour le quadrilatère DOCZ un sixième de l'aire du carré. De plus, du moment que, par hypothèse³, la droite NC passe par le point F, et que CF serait parallèle à GE, EG est à CF comme⁴ EQ est à CQ et comme GQ est à FQ. Or comme⁵ EQ est le double de CQ et GQ le double de FQ, le triangle EQG est double de chacun des deux triangles GCQ et EFQ. Mais il est évident⁶ que le triangle EGZ est double du triangle EFG, parce que ZE est double de FE. Or le triangle EGZ est égal au quart du carré, d'où il suit que le triangle EFG est égal au huitième du carré, mais comme le triangle EFG est triple de chacun des deux triangles EFQ et GCQ, chacun de ces derniers triangles est égal au vingt-quatrième du carré AG. D'autre part, le triangle EGQ est double de chacun des deux triangles EFQ et GCQ, et donc égal au douzième du carré. Puisque, en outre, ZF est égal à EF, le triangle ZFG est égal au triangle EFG ; si nous retranchons maintenant (sc. de ces derniers triangles) le triangle GCQ, égal au triangle EFQ, il reste le quadrilatère FQCZ, équivalent au triangle EGQ, d'où il suit que le quadrilatère FQCZ est lui aussi égal au douzième du carré AG.

Ayant ainsi divisé le rectangle ZG en sept parties, passons à la division de l'autre rectangle.

1. Cf. Eucl. VI, 2.

2. Cf. Eucl. VI, 1.

3. Puisque DG et ZE, égaux entre eux, sont divisés en deux parties égales par les points N et F, ainsi que ZG par le point C.

4. Cf. Eucl. VI, 4.

5. Parce que $EG = 2CF$.

6. Cf. Eucl. VI, 1.

des Quadrates, resp. des Dreiecks OBG, also hat man die Proportion

$$BG : NC = GO : NO.$$

- Es ist aber BG das Vierfache von NC, also auch GO
 5 das Vierfache von NO ; deshalb ist nun GN das Dreifache von NO, und Dreieck GNC = 3 ONC. Da aber, wie wir gezeigt haben, Dreieck GNC = $1/16$ des Quadrates ist, so ist Dreieck ONC = $1/48$ des Quadrates. Weil ferner Dreieck GDZ = $1/4$ des
 10 Quadrates ist und deshalb GNC = $1/16$ desselben und Dreieck NCO = $1/48$ desselben, so bleibt für das Viereck DO CZ = $1/6$ der Quadratfläche übrig. Nach der Voraussetzung geht ferner die Linie NC durch den Punkt F, und es wäre CF parallel zu GE ;
 15 also hat man die Proportion EG : CF = EQ : CQ = GQ : FQ. Weil nun EQ = 2 CQ und GQ = 2 FQ, so ist Dreieck EQG das Doppelte jedes der beiden Dreiecke GCQ und EFQ. Es ist aber klar, dass Dreieck EGZ = 2 mal Dreieck EFG ist, weil ZE =
 20 2 FE ist. Das Dreieck EGZ ist aber = $1/4$ des Quadrates, also Dreieck EFG = $1/8$ desselben. Dieses ist aber das Dreifache jedes der beiden Dreiecke EFQ und GCQ ; also ist jedes dieser beiden Dreiecke = $1/24$ des Quadrates AG. Und das Dreieck EGQ
 25 ist das Doppelte jedes der beiden Dreiecke EFQ und GCQ ; also ist es = $1/12$ des Quadrates. Weil ferner ZF = EF ist, so ist Dreieck ZFG = Dreieck EFG ; wenn wir nun Dreieck GCQ = Dreieck EFQ wegnehmen, so bleibt Viereck FQCZ = Dreieck
 30 EGQ ; also ist auch Viereck FQCZ = $1/12$ des Quadrates AG.

Wir haben nun das Rechteck ZG in 7 Teile geteilt und gehen nun zur Teilung des andern Rechtecks über.

BZ et EC étant deux diagonales parallèles¹, et ZF étant égal à EF, les triangles ZLF et EFQ sont égaux², et, par conséquent, le triangle ZLF est la vingt-quatrième partie du carré AG. Comme BH est égal à HE, le triangle BEZ est quadruple du triangle BHT, chacun des deux triangles étant rectangle³. Mais comme le triangle BEZ est le quart du carré ABGD, le triangle BHT en est le seizième. De plus, la droite HK passe, par hypothèse, par le point A, d'où il suit⁴ que AB est à HT comme BK est à KT. Mais comme AB est double⁵ de HT, BK est double de KT, et, par conséquent, BT triple de KT; il s'ensuit que le triangle BHT est triple du triangle KHT. Mais le triangle BHT étant le seizième du carré entier, le triangle KHT en est le quarante-huitième. En outre, le triangle BKH est double du triangle KHT; il est donc la vingt-quatrième partie du carré. Puisque, de plus, BL est double⁶ de ZL et AL double de LF, le triangle ABL est double du triangle ALZ et le triangle ALZ double du triangle ZLF. Mais comme le triangle ZLF est le vingt-quatrième du carré entier, le triangle ALZ en est le douzième, d'où il suit que le triangle ABL en est le sixième. Or les triangles ABM et BML étant égaux, chacun d'eux est égal au douzième du carré. Il reste encore le pentagone LFEHT, qui est égal à la moitié du sixième augmentée de la moitié du huitième du carré entier⁷.

Le carré AE ayant ainsi été divisé, lui aussi, en sept parties, toute la figure ABGD se trouve divisée en quatorze parties ayant avec elle des rapports commensurables, et c'est ce que nous voulions.

1. Cf. Eucl. VI, 2.

2. Cf. Eucl. VI, 19.

3. Et les triangles BEZ et BHT étant, par conséquent, semblables et ayant entre eux le rapport $\frac{\overline{BE}^2}{\overline{BH}^2}$; cf. Eucl. VI, 19.

4. Cf. Eucl. VI, 4.

5. Parce que T divise BZ en deux parties égales.

6. Parce que les triangles ABL et ZFL sont semblables, et $AB = 2ZF$.

7. Cf. notes complémentaires.

Weil BZ und EC zwei parallele Diagonalen sind, und $ZF = EF$ ist, so ist Dreieck $ZLF = EFQ$, mithin Dreieck $ZLF = 1/24$ des Quadrates AG. Weil $BH = HE$ ist, so ist Dreieck BEZ das Vierfache des Dreiecks

5 BHT ; denn jedes desselben ist rechtwinklig. Da aber Dreieck BEZ $= 1/4$ des Quadrates ABGD ist, so ist Dreieck BHT $= 1/16$ desselben. Nach unserer Voraussetzung geht ferner die Linie HK durch den Punkt A ; also hat man die Proportion

10 $AB : HT = BK : KT.$

Es ist aber $AB = 2 HT$, also auch $BK = 2 KT$, mithin $BT = 3 KT$; also ist Dreieck BHT das Dreifache des Dreiecks KHT. Weil aber Dreieck BHT $= 1/16$ des ganzen Quadrates ist, so ist Dreieck KHT $= 1/48$

15 desselben. Ferner ist Dreieck BKH das Doppelte des Dreiecks KHT, also $= 1/24$ des Quadrates. Da weiter $BL = 2 ZL$, und $AL = 2 LF$ ist, so ist Dreieck ABL das Doppelte des Dreiecks ALZ und Dreieck ALZ das Doppelte des Dreiecks ZLF. Weil aber Dreieck

20 $ZLF = 1/24$ des ganzen Quadrates ist, so ist Dreieck $ALZ = 1/12$ desselben, also Dreieck $ABL = 1/6$. Es ist aber Dreieck $ABM =$ Dreieck BML , also jedes dieser beiden Dreiecke $= 1/12$ des Quadrates. Es bleibt noch übrig das Fünfeck LFEHT $=$ der Hälfte

25 eines Sechstels mehr der Hälfte eines Achtels des ganzen Quadrates.

Wir haben also auch das Quadrat AE in 7 Teile geteilt ; mithin ist die ganze Figur ABGD in 14 Teile geteilt, welche zu ihr in Verhältnis stehen ; und das

30 ist, was wir wollten.

NOTICE

Dans ce traité, dont la tradition ne nous a conservé que quinze propositions, Archimède développe, en les généralisant, les principes de la méthode d'investigation, au moyen de la statique, dont la quadrature de la parabole avait montré l'efficacité. Après avoir démontré une nouvelle fois, mais par un procédé statique différent de celui qui lui avait servi la première fois, la proposition sur l'aire du segment de parabole, Archimède applique sa méthode à la comparaison de volumes et à la recherche de centres de gravité. La proposition 2 compare le volume de la sphère à celui d'un cône ayant pour base le grand cercle et pour hauteur le rayon de la sphère, et à celui d'un cylindre ayant pour base le grand cercle et pour hauteur le diamètre de la sphère ; la proposition 3 compare le volume d'un sphéroïde, c'est-à-dire d'un ellipsoïde de révolution, à celui du cylindre ayant pour base le grand cercle et pour hauteur l'axe de l'ellipsoïde ; la proposition 4 le volume d'un segment de conoïde rectangle, c'est-à-dire d'un paraboloides de révolution, à celui d'un cône de même base et de même hauteur. Suivent des propositions relatives aux volumes du segment sphérique et du segment d'ellipsoïde comparés à celui du cône, inscrit dans ces segments, de même base et de même hauteur, et aux centres de gravité de l'hémisphère, du segment de paraboloides de révolution, du segment sphérique et des segments de sphéroïde et de conoïde obtusangle, c'est-à-dire d'hyperboloides de révolution. Les propositions 12-15, les dernières qu'on ait pu déchiffrer

dans le manuscrit unique, C, de ce traité, sont consacrées à l'étude du volume d'une figure à laquelle sa forme a valu le nom de « sabot ». Il s'agit de la figure découpée d'un cylindre inscrit dans un prisme droit à bases carrées par un plan passant par le centre de l'un des carrés de base et par un des côtés du carré opposé. Archimède démontre, d'abord par sa méthode statique, proposition 12, ensuite géométriquement, proposition 15, que le volume de cette figure est égal à la sixième partie du volume du prisme. L'établissement de cette équivalence a constitué le premier « kybismos », la première mesure exacte d'un volume, limité en partie par une surface courbe, au moyen d'un volume limité entièrement par des plans et, partant, au moyen d'un cube. Ce coup de génie est, dans l'espace à trois dimensions, le pendant de la quadrature exacte de la parabole dans le plan. Archimède est pleinement conscient de la portée de sa découverte. Dans la lettre à Eratosthène placée comme introduction en tête de ce traité il souligne la nouveauté de la proposition établissant l'équivalence du « sabot » et celle d'une autre figure, à savoir celle qui est découpée dans un cylindre inscrit dans un cube par un second cylindre inscrit dans le même cube, avec des solides limités par des plans.

Les mots entre < > du texte grec qui ne sont pas mentionnés dans l'apparat critique sont des conjectures de Heiberg pour les lacunes ou les passages mal lisibles du manuscrit C.

LA MÉTHODE D'ARCHIMÈDE RELATIVE AUX PROPOSITIONS MÉCANIQUES, A ÉRATOSTHÈNE

Archimède à Ératosthène, prospérité !

Je t'ai envoyé antérieurement certains théorèmes que j'avais découverts, en me bornant à en rédiger les énoncés et en t'invitant à trouver les démonstrations que je n'avais pas encore indiquées ; les énoncés des théorèmes envoyés étaient les suivants ; premièrement : si on inscrit dans un prisme droit, ayant pour base un parallélogramme¹, un cylindre ayant ses bases situées dans les parallélogrammes¹ opposés et (sc. certaines de) ses génératrices dans les plans restants du prisme², et si on mène un plan par le centre du cercle de base du cylindre et par un des côtés du carré situé dans le plan opposé, le plan ainsi mené découpera du cylindre un segment compris entre deux plans et la surface du cylindre, l'un des plans étant le plan mené, l'autre celui qui contient la base du cylindre, et la surface (sc. cylindrique) étant comprise entre les plans indiqués, et le segment découpé du cylindre est équivalent à la sixième partie du prisme entier. L'énoncé du second théorème était le suivant : si on inscrit dans un cube un cylindre ayant ses bases situées dans des parallélogrammes¹ opposés, et sa surface

1. Le contexte montre qu'il s'agit d'un carré.

2. Le cylindre est donc tangent aux quatre faces du prisme.

ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ

Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων
πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος

Ἀρχιμήδης Ἐρατοσθένει εὖ πράττειν.

- Ἀπέστειλά σοι πρότερον τῶν εὐρημένων θεωρημάτων
5 ἀναγράψας αὐτῶν τὰς προτάσεις φάμενος εὐρίσκειν
ταύτας τὰς ἀποδείξεις, ἃς οὐκ εἶπον ἐπὶ τοῦ παρόντος ·
ἦσαν δὲ τῶν ἀπεσταλμένων θεωρημάτων αἱ προτάσεις
αἶδε · τοῦ μὲν πρώτου · ἐὰν εἰς πρίσμα ὀρθὸν παραλλη-
λόγραμμον ἔχον βάσιν κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν
10 βάσεις ἔχων ἐν τοῖς ἀπεναντίον παραλληλογράμμοις,
τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τῶν λοιπῶν τοῦ πρίσματος ἐπιπέδων,
καὶ διὰ τε <τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου,> ὅς ἐστι βᾶσις τοῦ
κυλίνδρου, καὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐν τῷ
κατεναντίον ἐπιπέδῳ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ἀχθὲν ἐπιπίπεδον
15 ἀποτεμεῖ τμήμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, ὃ ἐστι περιεχόμενον
ὑπὸ δύο ἐπιπέδων καὶ ἐπιφανείας κυλίνδρου, ἐνὸς μὲν
τοῦ ἀχθέντος, ἐτέρου δὲ ἐν ᾧ ἡ βᾶσις ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου,
τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς μεταξύ τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων,
τὸ δὲ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμήμα ἕκτον μέρος
20 ἐστὶ τοῦ ὅλου πρίσματος. Τοῦ δὲ ἐτέρου θεωρήματος ἡ
πρότασις ἦδε · ἐὰν εἰς κύβον κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς
μὲν βάσεις ἔχων πρὸς τοῖς κατεναντίον παραλληλογράμ-

tangente aux quatre plans restants, et si on inscrit dans le même cube un autre cylindre, ayant ses bases dans deux autres parallélogrammes et sa surface tangente aux quatre plans restants, la figure comprise entre les surfaces des cylindres et située à l'intérieur des deux cylindres est équivalente aux deux tiers du cube entier. Mais ces théorèmes diffèrent de ceux qui ont été trouvés antérieurement ; car dans ceux-là nous avons comparé les volumes de figures, comme les paraboloides, les hyperboloïdes et les ellipsoïdes de révolution, et les segments de ces figures, à des volumes de cônes et de cylindres, mais aucune de ces figures n'a été trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans, alors que chacune de ces figures, comprises entre deux plans et des surfaces cylindriques, est trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans.

Ce sont donc les démonstrations de ces théorèmes que je t'envoie, rédigées dans ce livre.

M'apercevant, comme je l'ai déjà dit, que tu es studieux, que tu domines d'une manière remarquable les questions de philosophie et que tu sais apprécier à sa valeur l'enquête mathématique sur des problèmes nouveaux qui se présentent, j'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes ; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas susceptible de démonstrations ;

- μοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, ἐγγραφῇ δὲ καὶ ἄλλος κύλινδρος εἰς τὸν αὐτὸν κύβον τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν ἄλλοις παραλληλογράμμοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσάρων
- 5 ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, τὸ περιληφθὲν σχῆμα ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κυλίνδρων, ὃ ἐστὶν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς κυλίνδροις, δίμοιρόν ἐστι τοῦ ὅλου κύβου. Συμβαίνει δὲ ταῦτα τὰ θεωρήματα διαφέρειν τῶν πρότερον εὑρημένων · ἐκεῖνα μὲν γὰρ τὰ σχήματα, τὰ τε κωνοειδῆ καὶ σφαιροειδῆ
- 10 καὶ τὰ τμήματα <αὐτῶν, τῷ μεγέθει σχήμασι> κώνων καὶ κυλίνδρων συνεκρίναμεν, ἐπιπέδοις δὲ περιεχομένῳ στερεῷ σχήματι οὐδὲν αὐτῶν ἴσον ἐὼν εὑρηται, τούτων δὲ τῶν σχημάτων τῶν δυσὶν ἐπιπέδοις καὶ ἐπιφανείαις κυλίνδρων ἕκαστον ἐνὶ τῶν ἐπιπέδοις περιεχομένων
- 15 στερεῶν σχημάτων ἴσον εὐρίσκεται.

Τούτων δὴ τῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξεις ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀποστελῶ σοι.

- Ὅρων δὲ σε, καθάπερ λέγω, σπουδαῖον καὶ φιλοσοφίας προεστώτα ἀξιολόγως καὶ τὴν ἐν τοῖς μαθήμασιν κατὰ
- 20 τὸ ὑποπίπτον θεωρίαν τετιμηκότα ἐδοκίμασα γράψαι σοι καὶ εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον ἐξορίσαι τρόπου τινὸς ιδιότητα, καθ' ὃν σοι παρεχόμενον ἔσται λαμβάνειν ἀφορμὰς εἰς τὸ δύνασθαι τινα τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι θεωρεῖν διὰ τῶν μηχανικῶν. Τοῦτο δὲ πέπεισμαι χρήσιμον εἶναι οὐδὲν
- 25 ἦσσον καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν θεωρημάτων. Καὶ γὰρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν · ἐτοιμότερον

2 ἐφαπτομένην Heiberg : ἐφαπτόμενος || 5 ἐφαπτομένην Heiberg : ἐφαπτόμενος || 11 ἐπιπέδοις Heiberg : ἐπιπέδων || 13 ἐπιπέδῳ Heiberg : ἐπιπέδῳ || 15 στερεῶν σχημάτων Heiberg : στερεῷ σχήματι || 24 πέπεισμαι || 26 τινα τῶν : om. || πρότερον : προτέρων || 28 τούτου add. Reinach.

car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance. Pour cette raison, de ces propositions sur le cône et la pyramide, dont Eudoxe fut le premier à trouver la démonstration, en particulier des théorèmes affirmant que le cône est la troisième partie du cylindre, et la pyramide la troisième partie du prisme, qui ont même base et même hauteur, on doit attribuer une part notable à Démocrite, qui le premier a formulé l'énoncé au sujet de la figure indiquée sans en donner une démonstration. Or il m'arrive que, aussi pour les propositions que je vais exposer maintenant, la découverte m'est venue de la même manière que pour les propositions précédentes ; aussi ai-je voulu rédiger et publier cette méthode, à la fois parce que j'en ai parlé antérieurement¹ et que j'ai voulu éviter de paraître à certains avoir proféré de vaines paroles, et parce que je suis convaincu d'apporter une contribution très utile à la recherche mathématique. Je suis persuadé, en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront, par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas encore venues à l'esprit.

Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m'être révélée par la mécanique, à savoir que tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur, ensuite une à une les propositions qui ont été examinées de la même manière. La fin du livre sera consacrée aux démonstrations géométriques des théorèmes dont je t'avais envoyé les énoncés antérieurement.

LEMMES

1. Si on retranche une grandeur d'une grandeur, et si le même point est centre de gravité à la fois de

1. Cf. *Quadr. parab.*, fin de la lettre à Dosithée.

- γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσιν τινα τῶν
 ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἢ μηδενὸς
 ἐγνωσμένου ζητεῖν. <... Διόπερ καὶ τῶν θεωρημάτων
 τούτων, ὧν Εὐδοξος ἐξηύρηκεν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν,
 5 περὶ τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος, ὅτι τρίτον μέρος
 ὁ μὲν κῶνος τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ πρίσματος,
 τῶν βάσιν ἔχόντων τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, οὐ μικρὰν
 ἀπονείμει ἂν τις Δημοκρίτῳ μερίδα πρῶτῳ τὴν ἀπόφασιν
 τὴν περὶ τοῦ εἰρημένου σχήματος χωρὶς ἀποδείξεως
 10 ἀποφνημαμένῳ. Ἡμῖν δὲ συμβαίνει καὶ τοῦ νῦν ἐκδιδομένου
 θεωρήματος τὴν εὕρεσιν ὁμοίαν ταῖς πρότερον γεγενῆσθαι ·
 ἡβουλήθην δὲ τὸν τρόπον ἀναγράψας ἐξενεγκεῖν ἅμα
 μὲν καὶ διὰ τὸ προειρηκέναι ὑπὲρ αὐτοῦ, μὴ τισιν δοκῶμεν
 κενὴν φωνὴν καταβεβλήσθαι, ἅμα δὲ καὶ πεπεισμένους
 15 εἰς τὸ μάθημα οὐ μικρὰν ἂν συμβαλέσθαι χρειαν · ὑπο-
 λαμβάνω γάρ τινας ἢ τῶν ὄντων ἢ ἐπιγινομένων διὰ
 τοῦ ἀποδειχθέντος τρόπου καὶ ἄλλα θεωρήματα οὕτω
 ἡμῖν συνπαραπεπτωκότα εὐρήσειν.

- Γράφομεν οὖν πρῶτον τὸ καὶ πρῶτον φανὲν διὰ τῶν
 20 μηχανικῶν, ὅτι πᾶν τμήμα ὀρθογωνίου κώνου τομῆς
 ἐπίτρίτον ἐστὶν τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν
 καὶ ὕψος ἴσον, μετὰ δὲ τοῦτο ἕκαστον τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ
 τρόπου θεωρηθέντων · ἐπὶ τέλει δὲ τοῦ βιβλίου γράφομεν
 τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις ἐκείνων τῶν θεωρημάτων,
 25 ὧν τὰς προτάσεις ἀπεστείλαμέν <σοι πρότερον>.

ΠΡΟΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Ἐὰν ἀπὸ μεγέθους μέγεθος ἀφαιρεθῇ, <τὸ δὲ αὐτὸ
 σημεῖον κέν>τρον τοῦ βάρους <ἢ τοῦ τε ὅλου> καὶ

4 ὧν : om. C || 8 ἂν : om. || 14 πεπεισμένος Heiberg : πεπει-
 σμένοις C || 15 ἂν : om. || 16 ἐπιγινομένων : ἐπιγιννομένων || 22 τῶν :
 om. || 24 <κὰς — 25 τὰς προ> suppl. Reinach || 25 <σοι πρό-
 τερον> suppl. Reinach || 26 ΠΡΟΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ add. Heiberg.

la grandeur entière et de la grandeur retranchée, ce même point est le centre de gravité de la grandeur qui reste.

2. Si une grandeur est retranchée d'une grandeur sans que le même point soit centre de gravité à la fois de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, le centre de gravité de la grandeur restante est situé sur le prolongement de la droite joignant les centres de gravité de la grandeur entière et de la partie retranchée, à l'extrémité d'un segment découpé dont le rapport au segment compris entre les centres de gravité indiqués est égal au rapport entre le poids de la grandeur retranchée au poids de la grandeur restante¹.

3. Si les centres de gravité d'un nombre aussi élevé qu'on voudra de grandeurs sont situés sur la même droite, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera, lui aussi, situé sur la même droite².

4. Le centre de gravité de tout segment de droite est le point qui divise le segment en deux parties égales³.

5. Dans tout triangle le centre de gravité est le point d'intersection des droites menées des sommets du triangle aux milieux des côtés⁴.

6. Dans tout parallélogramme le centre de gravité est le point de rencontre des diagonales⁵.

7. Le centre de gravité d'un cercle est le centre même du cercle.

8. Dans tout cylindre le centre de gravité est le point qui divise l'axe en deux parties égales.

9. Dans tout prisme le centre de gravité est le point qui divise l'axe en deux parties égales.

10. Dans tout cône le centre de gravité est situé sur l'axe, en un point qui divise l'axe de manière que le segment situé du côté du sommet soit triple du segment restant.

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.

2. Cf. *ibid.* I, 4 ; I, 5 ; II, 2.

3-5. Cf. notes complémentaires.

τοῦ ἀφαιρουμένου, <τοῦ> λοιποῦ τὸ αὐτὸ σημεῖον <κέντρον> ἐστὶ τοῦ βάρους.

<Ἐὰν ἀπὸ μεγέ<θους μεγέθο<ς ἀφαιρεθῇ, ἥ δὲ> μὴ τὸ αὐτὸ σημεῖον κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τε ὅλου μεγέθους
 5 καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου μεγέθους, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ λοιποῦ μεγέθους ἐπὶ τῆς <εὐθείας> τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους τοῦ τε ὅλου <καὶ τοῦ ἀφαιρουμέ<νου ἐκβεβλημένης καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπ' αὐτῆς πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν εἰρημένων κέντρων τοῦ
 10 βάρους τοῦτον ἔχουσης τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφαιρουμένου μεγέθους πρὸς τὸ [λοιπὸν] βάρος τοῦ λοιποῦ μεγέθους.

Ἐὰν ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ᾖ, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου
 15 μεγέθους τὸ κέντρον ἔσται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Πάσης εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἡ διχοτομία τῆς εὐθείας.

Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αἱ ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἐπὶ μέσας
 20 τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον ἐστὶν <τοῦ βάρους τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτουσιν.

Κύκλου> τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ὃ καὶ <τοῦ κύκλου> ἐστὶ κέντρον.

25 Παντὸς κυλίνδρου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἡ διχοτομία τοῦ ἄξονος.

Παντὸς πρίσματος τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἡ διχοτομία τοῦ ἄξονος.

Παντὸς κώνου τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους ἐπὶ τοῦ
 30 ἄξονος διαιρεθέντος οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμήμα τριπλάσιον εἶναι τοῦ λοιποῦ.

Nous nous servirons aussi de la proposition suivante, qui figure déjà dans le livre *Sur les conoïdes*¹ : Si des grandeurs en nombre quelconque ont à d'autres grandeurs, en même nombre, prises deux à deux dans le même rang, le même rapport, si les premières grandeurs, soit dans leur totalité, soit en partie, sont dans un rapport quelconque à d'autres grandeurs, et si les grandeurs de la seconde suite ont, prises dans le même ordre, le même rapport à d'autres grandeurs, le rapport entre la somme des premières grandeurs et la somme des grandeurs qui sont en proportion avec elles est égal au rapport entre la somme des grandeurs de la seconde suite et la somme des grandeurs en proportion avec elles².

1.

Soit le segment $AB\Gamma$ compris entre la droite AI' et la parabole $AB\Gamma$; divisons $A\Gamma$ en deux parties égales par le point Δ , menons la parallèle ΔBE au diamètre et les droites AB et $B\Gamma$ joignant B à A et à Γ .

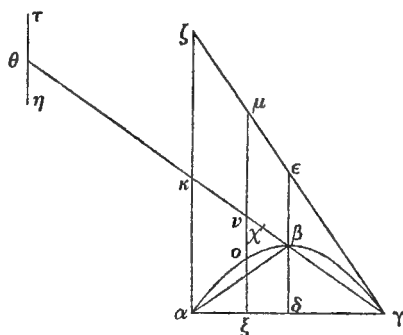


Fig. 121

Je dis que le segment $AB\Gamma$ est équivalent aux quatre tiers du triangle $AB\Gamma$.

1-2. Cf. notes complémentaires.

Menons des points A et Γ la droite AZ parallèle à ΔBE et la droite ΓZ tangente au segment et prolongeons ΓB jusqu'au point K ; soit ΓK égal à $K\Theta$. Imaginons que $\Gamma\Theta$ soit un levier de centre K, et choisissons une parallèle $M\Xi$ à $E\Delta$.

Dès lors, comme ΓBA est une parabole¹, que ΓZ est une tangente et que $\Gamma\Delta$ est mené d'une manière ordonnée, EB est égal à $B\Delta$, comme cela a été démontré dans les *Eléments*² ; pour cette raison, et parce que ZA et $M\Xi$ sont parallèles à $E\Delta$, MN est égal³ à $N\Xi$ et ZK égal à KA . Et comme ΓA est à $A\Xi$ comme $M\Xi$ est à ΞO , comme cela est démontré dans un lemme⁴, que ΓA est à $A\Xi$ comme ΓK est à KN , et que, enfin, ΓK est égal à $K\Theta$, le rapport de ΘK à KN est égal au rapport de $M\Xi$ à ΞO . Et puisque le point N est le centre de gravité⁵ du segment de droite $M\Xi$, parce que MN est égal à $N\Xi$, si nous plaçons le segment de droite TH , égal à ΞO , de manière que son centre de gravité soit le point Θ et que $T\Theta$ soit égal à ΘH , le segment de droite $T\Theta H$ fera équilibre au segment de droite $M\Xi$ restant en place, parce que ΘN est coupé en raison inverse des poids TH et $M\Xi$ et que ΘK est à KN comme⁶ $M\Xi$ est à HT ; il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux poids⁷ est le point K ; de la même manière aussi toutes les parallèles à $E\Delta$ menées dans le triangle $Z\Delta\Gamma$ feront équilibre, en restant en place, aux segments, découpés d'eux par la parabole et transportés au point Θ de manière que le centre de gravité de la grandeur composée des uns et des autres soit le point K. Et du moment que le triangle ΓZA est constitué par les segments de droite menés dans le triangle ΓZA , et le segment $AB\Gamma$ constitué par les segments de droite pris dans le segment (sc. de parabole) de la même manière que ΞO , le triangle $Z\Delta\Gamma$ fera équilibre, en restant en place, au segment de parabole placé autour du centre

1. παραβολή dans le texte grec, mot qui provient d'une interpolation ; Archimède appelle la parabole ὀρθογωνίου κώνου τομά.

2-7. Cf. notes complémentaires.

Ἦχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ἡ μὲν ΑΖ παρὰ τὴν ΔΒΕ, ἡ δὲ ΓΖ ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Κ, καὶ κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΚΘ. Νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Κ καὶ τῇ ΕΔ παράλληλος
5 τυχούσα ἡ ΜΞ.

Ἐπεὶ οὖν παραβολὴ ἐστὶν ἡ ΓΒΑ, καὶ ἐφάπτεται ἡ ΓΖ, καὶ τεταγμένως ἡ ΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΔ · τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς στοιχείοις δείκνυται · διὰ δὲ τοῦτο, καὶ διότι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΖΑ, ΜΞ τῇ ΕΔ, ἴση ἐστὶν καὶ
10 ἡ μὲν ΜΝ τῇ ΝΞ, ἡ δὲ ΖΚ τῇ ΚΑ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΕΟ [τοῦτο γὰρ ἐν λήμματι δείκνυται], ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς ΚΝ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΘ, ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ΚΝ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΕΟ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Ν σημεῖον κέντρον τοῦ βάρους
15 τῆς ΜΞ εὐθείας ἐστίν, ἐπείπερ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ, ἐὰν ἄρα τῇ ΕΟ ἴσην θῶμεν τὴν ΤΗ καὶ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῆς τὸ Θ, ὅπως ἴση ᾖ ἡ ΤΘ τῇ ΘΗ, ἰσορροπήσῃ ἡ ΤΘΗ τῇ ΜΞ αὐτοῦ μενούση διὰ τὸ ἀντιπεπονθότως τετμηθῆσαι τὴν ΘΝ τοῖς ΤΗ, ΜΞ βάρεσιν, καὶ ὡς τὴν ΘΚ
20 πρὸς ΚΝ, οὕτως τὴν ΜΞ πρὸς τὴν ΗΤ · ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων βάρους κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Κ. Ὅμοίως δὲ καὶ ὅσαι ἂν ἀχθῶσιν ἐν τῷ ΖΑΓ τριγώνῳ παράλληλοι τῇ ΕΔ ἰσορροπήσουσιν αὐτοῦ μένουσαι ταῖς ἀπολαμβανομέναις ἀπ' αὐτῶν ὑπὸ τῆς τομῆς
25 μετενεχθείσαις ἐπὶ τὸ <Θ, ὥστε εἶναι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ. Καὶ ἐπεὶ ἐκ μὲν τῶν ἐν τῷ ΓΖΑ τριγώνῳ τὸ ΓΖΑ τρίγωνον συνέστηκεν, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῇ τομῇ ὁμοίως τῇ ΕΟ λαμβανομένων συνέστηκε τὸ ΑΒΓ τμήμα, ἰσορροπήσῃ ἄρα τὸ ΖΑΓ τρίγωνον αὐτοῦ μένον
30 τῷ τμήματι τῆς τομῆς τεθέντι περὶ κέντρον τοῦ βάρους

11 ΓΑ : ΓΔ || ΕΟ : ΕΘ || 11-12 [τοῦτο — δείκνυται] del. Heiberg
|| 17 ᾗ : om. || 22 ἂν : ἐάν || 23 ΕΔ : ΗΔ || μένουσαι : μενούσαις
|| 26 κέντρον : κέντρων || 27 τὸ ΓΖΑ τρίγωνον suppl. Heiberg.

de gravité Θ , l'équilibre se faisant par rapport au point K, de façon que le centre de gravité de la somme des deux grandeurs soit le point K. Divisons dès lors ΓK par le point X de manière que ΓK soit triple de KX ; le point X sera donc le centre de gravité du triangle $AZ\Gamma$, comme cela a été démontré dans le livre *Des équilibres*¹. Du moment donc que le triangle $ZA\Gamma$, restant en place, fait équilibre, par rapport au point K, au segment $BA\Gamma$ placé autour du centre de gravité Θ , et que le centre de gravité du triangle $ZA\Gamma$ est le point X, le rapport du triangle $AZ\Gamma$ au segment $AB\Gamma$ placé autour du centre Θ est égal au rapport de ΘK à XK . Or ΘK est triple de KX ; il s'ensuit que le triangle $AZ\Gamma$ est à son tour triple du segment $AB\Gamma$. Mais le triangle $ZA\Gamma$ est aussi quadruple du triangle $AB\Gamma$, parce que ZK est égal à KA , et $A\Delta$ égal² à $\Delta\Gamma$; par conséquent, le segment $AB\Gamma$ est équivalent aux quatre tiers du triangle $AB\Gamma$.

2.

La proposition qui précède n'est, certes, pas démontrée par ce que nous venons de dire, mais elle donne une certaine idée que la conclusion est vraie ; pour cette raison, voyant que la propriété n'est pas démontrée, mais pressentant que la conclusion est vraie, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique que nous avons trouvée et publiée antérieurement³.

Toute sphère est quadruple du cône ayant sa base égale au grand cercle de la sphère et une hauteur égale au rayon de la sphère, et le cylindre ayant une base égale au grand cercle d'une sphère et une hauteur égale au diamètre de la sphère est équivalent aux trois demis de la sphère. D'après notre méthode, ces deux propositions s'analysent de la manière que voici :

1. Cf. lemme 5 et *De l'équil. des fig. planes* I, 15.

2-3. Cf. notes complémentaires.

- τὸ Θ κατὰ τὸ Κ σημεῖον, ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Κ. Τετμήσθω δὴ ἡ ΓΚ τῷ Χ, ὥστε τριπλασίαν εἶναι τὴν ΓΚ τῆς ΚΧ · ἔσται ἄρα τὸ Χ σημεῖον κέντρον βάρους τοῦ ΑΖΓ τριγώνου · δέδεικται γὰρ ἐν
- 5 τοῖς Ἰσορροπικοῖς. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπον τὸ ΖΑΓ τρίγωνον αὐτοῦ μένον τῷ ΒΑΓ τμήματι κατὰ τὸ Κ τεθέντι περὶ τὸ Θ κέντρον τοῦ βάρους, καὶ ἐστὶν τοῦ ΖΑΓ τριγώνου κέντρον βάρους τὸ Χ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΓ τμήμα κείμενον περὶ τὸ Θ κέντρον, οὕτως ἡ ΘΚ
- 10 πρὸς ΧΚ. Τριπλασία δέ ἐστὶν ἡ ΘΚ τῆς ΚΧ · τριπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τμήματος · Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΑΓ τρίγωνον τετραπλάσιον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΖΚ τῇ ΚΑ, τὴν δὲ ΑΔ τῇ ΔΓ · ἐπίτριτον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τμήμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.
- 15 [Τοῦτο οὖν φανερόν ἐστιν].

β'.

- Τοῦτο δὴ διὰ μὲν τῶν νῦν εἰρημένων οὐκ ἀποδέδεικται, ἔμφασιν δέ τινα πεποίηκε τὸ συμπέρασμα ἀληθὲς εἶναι · διόπερ ἡμεῖς ὀρώντες μὲν οὐκ ἀποδεδειγμένον, ὑπο-
- 20 νοοῦντες δὲ τὸ συμπέρασμα ἀληθὲς εἶναι, τάξομεν τὴν γεωμετρουμένην ἀπόδειξιν ἐξευρόντες αὐτοὶ τὴν ἐκδοθεῖσαν πρότερον.

- Ὅτι δὲ πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶν τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν
- 25 ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιος τῆς σφαίρας ἐστίν, ὧδε θεωρεῖται κατὰ τρόπον τόνδε ·

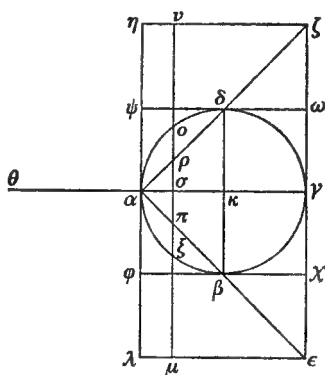


Fig. 122

Soit une sphère, $AB\Gamma\Delta$ un grand cercle, et $A\Gamma$ et $B\Delta$ deux diamètres perpendiculaires l'un à l'autre. Soit, dans cette sphère, un cercle de diamètre $B\Delta$, perpendiculaire au (sc. plan du) cercle $AB\Gamma\Delta$. Sur ce cercle perpendiculaire construisons un cône ayant pour sommet le point A . La surface du cône étant prolongée, coupons le cône par un plan passant par le point Γ et parallèle à la base du cône ; l'intersection sera donc un cercle perpendiculaire à $A\Gamma$, dont le diamètre sera le segment de droite EZ . Sur ce cercle construisons un cylindre ayant l'axe égal à $A\Gamma$; soit EA et ZH les génératrices du cylindre (sc. situées dans le plan de la figure). Prolongeons ΓA et portons sur le prolongement le segment $A\Theta$ égal à $A\Gamma$. Imaginons que $\Gamma\Theta$ soit un levier de milieu A . Menons une parallèle MN à $B\Delta$; que cette parallèle coupe le cercle $AB\Gamma\Delta$ en Ξ et O , le diamètre $A\Gamma$ en Σ , la droite AE en Π , la droite AZ en P . Sur MN élevons un plan perpendiculaire à $A\Gamma$; ce plan coupera le cylindre

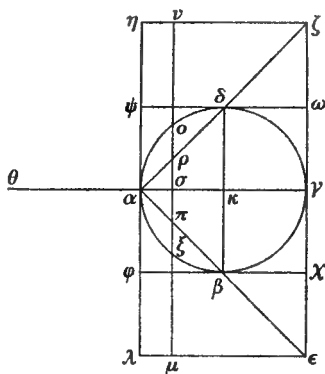


Fig. 122

- Ἐστω γάρ τις σφαῖρα, ἐν ἣ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διαμέτροι δὲ αἱ ΑΓ, ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις οὔσαι, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῇ σφαίρᾳ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ κύκλου
- 5 τούτου κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Α σημεῖον, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν· <ποιήσῃ δὴ κύκλον ὀρθὸν πρὸς> τὴν ΑΓ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΕΖ. Ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἀναγεγράφθω ἄξονα
- 10 ἔχων τῇ ΑΓ ἴσον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κυλίνδρου αἱ ΕΛ, ΖΗ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἦχθω τις παράλληλος ὑπάρχουσα τῇ ΒΔ ἡ ΜΝ, τεμνέτω δὲ αὕτη τὸν μὲν ΑΒΓΔ κύκλον κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὴν δὲ ΑΓ
- 15 διάμετρον κατὰ τὸ Σ, τὴν δὲ ΑΕ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Π, τὴν δὲ ΑΖ κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ εὐθείας ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ· ποιήσῃ δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν <κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΜΝ,

suisant un cercle de diamètre MN, la sphère ABΓΔ suisant un cercle de diamètre EO, le cône AEZ suisant un cercle de diamètre ΠP.

Puisque le rectangle de côtés ΓA, AΣ est égal au rectangle de côtés MΣ, ΣΠ en vertu de l'égalité¹ entre AΓ et ΣM d'une part, entre AΣ et ΠΣ d'autre part, puisque, de plus, le rectangle de côtés ΓA et AΣ est équivalent² au carré sur AΞ et, par conséquent, à la somme³ des carrés sur ΞΣ et sur ΣΠ, le rectangle de côtés MΣ, ΣΠ est équivalent à la somme des carrés sur ΞΣ et sur ΣΠ. Puisque, d'autre part, ΓA est à AΣ comme MΣ est à ΣΠ, et que ΓA est égal à AΘ, le rapport de ΘA à AΣ est égal au rapport de MΣ à ΣΠ et, par conséquent, au rapport du carré sur MΣ au rectangle de côtés MΣ, ΣΠ ; mais nous avons montré que le rectangle de côtés MΣ, ΣΠ est équivalent à la somme des carrés sur ΞΣ et sur ΣΠ ; le rapport de AΘ à AΣ est donc égal au rapport du carré sur MΣ à la somme des carrés sur ΞΣ et sur ΣΠ. Mais le carré sur MΣ est à la somme des carrés sur ΞΣ et sur ΣΠ comme⁴ le carré sur MN est à la somme des carrés sur EO et sur ΠP, et ce dernier rapport est égal au rapport du cercle de diamètre MN, situé dans le cylindre, à la somme des deux cercles dont l'un, situé dans le cône, a pour diamètre ΠP, et dont l'autre, situé dans la sphère, a pour diamètre EO ; il s'ensuit que ΘA est à AΣ comme le cercle dans le cylindre est à la somme du cercle dans la sphère et du cercle dans le cône. Dans ces conditions, puisque ΘA est à AΣ comme le cercle dans le cylindre, restant à sa place, est à la somme des deux cercles⁵ de diamètres EO et ΠP, déplacés en Θ de manière que Θ soit le centre de gravité de chacun d'eux, ces cercles se feront équilibre par rapport au point A. On démontrera de la même manière que, si dans le rectangle ΛZ on mène une autre parallèle à EZ et qu'on élève sur la droite ainsi menée un plan perpendiculaire à AΓ, le cercle déterminé dans le cylindre fera équilibre, en restant en place

1-5. Cf. notes complémentaires.

ἐν δὲ τῇ ΑΒΓΔ σφαίρᾳ κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ ΑΕΖ κώνῳ κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΠΡ.

- Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ τῷ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ,
 5 ἴση γὰρ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΣΜ, ἡ δὲ ΑΣ τῇ ΠΣ, τῷ δὲ ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΞ, τουτέστιν τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΣ, ΣΠ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ,
 10 τουτέστι τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ. Τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ ἴσα ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ · ὡς ἄρα ἡ ΑΘ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, οὕτως
 15 ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς ἄμφοτέρους τοὺς κύκλους τόν τε ἐν τῷ κώνῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ,) καὶ τὸν ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ ἐστὶν διάμετρος ἡ ΞΟ · ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ πρὸς τοὺς κύκλους τόν τε ἐν τῇ σφαίρᾳ καὶ
 20 τὸν ἐν τῷ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως αὐτὸς ὁ κύκλος ἢ ἐν τῷ κυλίνδρῳ αὐτοῦ μένων ἄμφοτέροις τοῖς κύκλοις, ὧν εἰσιν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενεχθεῖσιν καὶ τεθεῖσιν οὕτως ἐπὶ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ, ἰσορροπήσουσι κατὰ τὸ Α σημεῖον.
 25 Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη ἀχθῇ ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον

2 τῷ : τὸ || διάμετρος : ἡ διάμετρος || 4 τῷ Reinach : τὸ || 5 ὑπὸ : ἀπὸ || 10 Τῷ : τὸ || 13 τὸ : τὰ || 14 τὸ : τὰ || 15 διάμετρος : ἡ διάμετρος || 21 αὐτὸς ὁ : ὁ αὐτὸς || 25 ΛΖ : ΑΓ.

et par rapport au point A, à la somme des deux cercles déterminés dans la sphère et dans le cône et placés sur le levier au point Θ de manière que Θ soit le centre de gravité de chacun des deux. Le cylindre, la sphère et le cône étant ainsi remplis par les cercles ainsi pris, le cylindre, restant en place, fera équilibre autour du point A à la somme de la sphère et du cône, déplacés sur le levier au point Θ de manière que Θ soit le centre de gravité de chacune de ces deux figures. Par conséquent, puisque les solides indiqués se font équilibre autour du point A, le cylindre restant en place autour du centre de gravité¹ K, la sphère et le cône étant déplacés, comme nous venons de le dire, autour du centre de gravité Θ , le cylindre sera à la somme de la sphère et du cône comme² ΘA est à AK . Or ΘA est double de AK ; il s'ensuit que le cylindre est équivalent au double de la somme de la sphère et du cône ; mais du cône lui-même le cylindre est triple³ ; la somme des trois cônes est donc équivalente à la somme de deux de ces mêmes cônes et de deux sphères. Retrançons deux cônes de part et d'autre ; il s'ensuit que le cône admettant $A\epsilon Z$ comme triangle passant par l'axe est équivalent à la somme des deux sphères indiquées. Or le cône admettant $A\epsilon Z$ comme triangle passant par l'axe est équivalent à la somme de huit cônes⁴ admettant comme triangle passant par l'axe le triangle $AB\Delta$, du moment que EZ est double de $B\Delta$. La somme des huit cônes indiqués est donc équivalente à la somme des deux sphères. La sphère de grand cercle $AB\Gamma\Delta$ est donc équivalente⁵ au quadruple du cône ayant pour sommet le point A et pour base le cercle de diamètre $B\Delta$ perpendiculaire à $A\Gamma$.

Menons maintenant, dans le rectangle AZ , par les

1. Cf. lemme 8.

2. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 6 et 7.

3. Cf. Eucl. XII, 10.

4. Cf. Eucl. XII, 12.

5. Cf. *De la sph. et du cyl.* I, 34.

αὐτοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις τῷ τε ἐν τῇ σφαίρᾳ
 γινομένῳ καὶ τῷ ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθείσιν
 ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν
 κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντος οὖν
 5 τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων καὶ τῆς
 σφαίρας καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσει ὁ κύλινδρος περὶ τὸ
 Α σημεῖον αὐτοῦ μένων συναμφοτέροις τῇ τε σφαίρᾳ
 καὶ τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθείσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ
 κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους
 10 τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὰ εἰρημένα στερεὰ κατὰ τὸ
 Α σημεῖον τοῦ μὲν κυλίνδρου μένοντος περὶ κέντρον τοῦ
 βάρους τὸ Κ, τῆς δὲ σφαίρας καὶ τοῦ κώνου μετενηνεγμέ-
 νων, ὡς εἴρηται, περὶ κέντρον βάρους τὸ Θ, ἔσται ὡς ἡ
 ΘΑ πρὸς ΑΚ, οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὴν σφαῖραν καὶ
 15 τὸν κώνον. Διπλασία δὲ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ · διπλασίων ἄρα
 καὶ ὁ κύλινδρος συναμφοτέρου τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ
 κώνου. Αὐτοῦ δὲ τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστὶ · τρεῖς
 ἄρα κῶνοι ἴσοι εἰσὶ δυσὶ κῶνοις τοῖς αὐτοῖς καὶ δυσὶ
 σφαίραις. Κοινοὶ ἀφηγήσθωσαν δύο κῶνοι · εἷς ἄρα κῶνος
 20 ὁ ἔχων τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ ἴσος ἐστὶ
 ταῖς εἰρημέναις δυσὶ σφαίραις. Ὁ δὲ κῶνος, οὗ τὸ διὰ
 τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ, ἴσος ἐστὶν ὀκτὼ κῶνοις,
 ὧν ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ, διὰ τὸ
 διπλὴν εἶναι τὴν ΕΖ τῆς ΒΔ. Οἱ ἄρα ὀκτὼ κῶνοι οἱ εἰρημένοι
 25 ἴσοι εἰσὶ δυσὶ σφαίραις. Τετραπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ
 σφαῖρα, ἥς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, τοῦ κώνου, οὗ
 κορυφὴ μὲν ἐστὶ τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον
 τὴν ΒΔ κύκλος ὁρθὸς ὧν πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἦχθωσαν δὲ διὰ τῶν Β, Δ σημείων ἐν τῷ ΑΖ παραλλη-

points B et Δ les droites ΦBX et $\Psi \Delta \Omega$ parallèles à AI , et imaginons un cylindre ayant pour bases les cercles de diamètres $\Phi\Psi$ et $X\Omega$ et pour axe le segment AI . Puisque, dans ces conditions, le cylindre dont le rectangle passant par l'axe est $\Phi\Omega$ est double¹ du cylindre dont le rectangle passant par l'axe est $\Phi\Delta$, et que ce dernier cylindre est triple² du cône dont le triangle passant par l'axe est $AB\Delta$, comme cela a été démontré dans les *Eléments*, le cylindre dont le rectangle passant par l'axe est $\Phi\Omega$ est sextuple du cône dont le triangle passant par l'axe est $AB\Delta$. Mais nous avons démontré que de ce même cône la sphère de grand cercle $AB\Gamma\Delta$ est le quadruple; le cylindre est donc équivalent aux trois demis de la sphère, ce qu'il fallait démontrer³.

C'est en considérant cette dernière propriété, à savoir que toute sphère est quadruple du cône ayant pour base le grand cercle et pour hauteur le rayon de la sphère, que j'ai eu l'idée que la surface de toute sphère est quadruple du grand cercle de la sphère⁴; je supposais, en effet, que, du moment que tout cercle est équivalent à un triangle ayant pour base la circonférence du cercle et pour hauteur le rayon du cercle⁵, toute sphère est équivalente à un cône ayant pour base la surface et pour hauteur le rayon de la sphère.

3.

On examine par cette méthode aussi la proposition, d'après laquelle le cylindre ayant une base égale au grand cercle de l'ellipsoïde de révolution et une hauteur égale à l'axe de l'ellipsoïde est équivalent aux trois

1. Cf. Eucl. XII, 14.

2. Cf. Eucl. XII, 10.

3. Cf. *De la sph. et du cyl.* I, 34, coroll.

4. Cf. *ibid.* I, 33.

5. Cf. *Mes. du cercle*, 1.

λογράμῳ τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΦΒΧ, ΨΔΩ, καὶ νοείσθω
κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΦΨ,
ΧΩ κύκλοι, ἄξων δὲ ὁ ΑΓ. Ἐπεὶ οὖν διπλάσιός ἐστιν
ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον
5 τὸ ΦΩ, τοῦ κυλίνδρου, (οὗ ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος
παραλ)ληλόγραμμον τὸ ΦΔ, αὐτὸς δὲ οὗτος τριπλασίων
ἐστὶν τοῦ κώνου, οὗ ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ
ΑΒΔ, ὡς ἐν τοῖς Στοιχείοις, ἑξαπλασίων ἄρα ὁ κύλινδρος,
οὗ ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΦΩ,
10 τοῦ κώνου, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ.
Ἐδείχθη δὲ τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα ἡ σφαῖρα,
ἥς μέγιστός ἐστιν κύκλος ὁ ΑΒΓΔ · ἡμιόλιος ἄρα ὁ
κύλινδρος τῆς σφαίρας · ὅπερ ἔδει δειχθῆναι.

Τούτου τεθεωρημένου, διότι πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία
15 ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον
κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ
ἐννοια ἐγένετο ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία
ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ · ὑπόληψις
γὰρ ἦν καὶ διότι πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ βάσιν
20 μὲν ἔχοντι τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ
ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ διότι πᾶσα σφαῖρα ἴση
ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας,
ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

γ'.

25 Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου τούτου (καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος
ὁ τὴν μὲν βάσιν) ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῷ
σφαιροειδεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἄξονι τοῦ σφαιροειδοῦς,

1 ΦΒΧ, ΨΔΩ : $\overline{\phi\beta} \overline{\psi\delta} \overline{\omega\omega}$ || 1-2 νοείσθω κύλινδρος, οὗ :
νοείσθωσαν κύλινδροι ὧν || 3 κύκλοι : κύκλους || 12 ἐστὶν : μὲν
ἐστὶν ὁ || 14 Τούτου τεθεωρημένου : τοῦ τοῦ τεθωρήματος || 24
γ' : om.

ἡμιόλιός ἐστι τοῦ σφαιροειδοῦς · τούτου \square θεωρηθέντος φανερόν ὅτι παντὸς σφαιροειδοῦς ἐπιπέδῳ τμηθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῶ πρὸς τὸν ἄξονα τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν
 5 ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

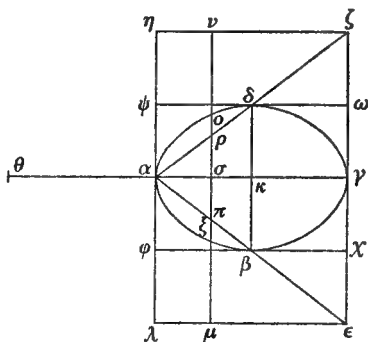


Fig. 123

Ἐστω γάρ τι σφαιροειδὲς καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ γινέσθω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὴ ἡ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αὐτῆς ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῷ σφαιροειδεῖ
 10 περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς πρὸς τὴν ΑΓ, νοείσθω δὲ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν εἰρημένον κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τετμήσθω \square κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν · ἔσται δὴ ἡ τομὴ αὐτοῦ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὴν ΑΓ,
 15 διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΕΖ. Ἐστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν αὐτὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΕΖ, ἄξονα δὲ τὴν ΑΓ εὐθεῖαν, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΑ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΘΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α,

parallélogramme AZ la droite MN parallèle à EZ et élevons sur MN un plan perpendiculaire à AG ; dès lors, l'intersection de ce plan avec le cylindre sera un cercle de diamètre MN , son intersection avec l'ellipsoïde¹ sera un cercle de diamètre EO , et son intersection avec le cône sera un cercle de diamètre PP .

Du moment que GA est à $A\Sigma$ comme² EA est à AP , c'est-à-dire comme³ $M\Sigma$ est à $\Sigma\Pi$, et que GA est égal à AO , OA sera à $A\Sigma$ comme $M\Sigma$ est à $\Sigma\Pi$. Or $M\Sigma$ est à $\Sigma\Pi$ comme le carré sur $M\Sigma$ est au rectangle compris entre $M\Sigma$ et $\Sigma\Pi$; mais le rectangle de côtés $M\Sigma$ et $\Sigma\Pi$ est équivalent à la somme des carrés sur $\Pi\Sigma$ et sur ΣE . Comme, en effet, le rapport du rectangle de côtés $A\Sigma$ et $\Sigma\Gamma$ au carré sur ΣE est égal au rapport du rectangle de côtés AK et $K\Gamma$, c'est-à-dire du carré sur AK , au carré sur KB — ces deux rapports sont en effet égaux au rapport de l'axe principal au paramètre⁴ — et que le rapport du carré sur AK au carré sur KB est égal au rapport du carré sur $A\Sigma$ au carré sur $\Sigma\Pi$, par permutation le rapport du carré sur $A\Sigma$ au rectangle de côtés AZ et $\Sigma\Gamma$ sera égal au rapport du carré sur $\Pi\Sigma$ au carré sur ΣE . Mais le carré sur $A\Sigma$ est au rectangle de côtés $A\Sigma$ et $\Sigma\Gamma$ comme⁵ le carré sur $\Sigma\Pi$ est au rectangle de côtés $\Sigma\Pi$ et ΠM ; il s'ensuit que le rectangle de côtés $M\Pi$ et $\Pi\Sigma$ est équivalent⁶ au carré sur ΣE . Ajoutons de part et d'autre le carré sur $\Pi\Sigma$; le rectangle de côtés $M\Sigma$ et $\Sigma\Pi$ sera alors équivalent à la somme des carrés sur $\Pi\Sigma$ et sur ΣE . Il s'ensuit que le rapport de OA à $A\Sigma$ est égal au rapport du carré sur $M\Sigma$ à la somme des carrés sur $\Pi\Sigma$ et sur ΣE . Mais le rapport du carré sur $M\Sigma$ à la somme des carrés sur ΣE et sur $\Sigma\Pi$ est égal⁷ au rapport du cercle, dans le cylindre, de diamètre MN à la somme des deux cercles de diamètres EO et PP ; par conséquent, le cercle de diamètre MN , restant en place, fera équilibre autour du point A aux deux cercles de diamètres EO et PP , déplacés et posés sur le levier au point Θ de manière que Θ soit le centre de gravité de chacun d'eux.

ἤχθω δέ τις ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν ΕΖ
 ἢ ΜΝ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς
 τὴν ΑΓ· ποιήσῃ δὴ τοῦτο ἐν> μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν
 κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ σφαιροειδεῖ τομὴν
 5 κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ τομὴν κύκλον,
 οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΣ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς
 ΑΠ, τουτέστιν ἡ ΜΣ πρὸς τὴν ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ,
 ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ. Ὡς δὲ ἡ
 10 ΜΣ πρὸς ΣΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ· τῷ
 δὲ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΠΣ, ΣΞ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν
 ὡς τὸ ὑπὸ ΑΣ, ΣΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΚ,
 ΚΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΑΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ [ἀμφότεροι
 γὰρ οἱ λόγοι ἐν τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν εἰσίν],
 15 ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΣ
 πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, ἐναλλάξ ἄρα ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς
 τὸ ὑπὸ ΑΣΓ, τὸ ἀπὸ ΠΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ
 ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΣΓ, τὸ ἀπὸ ΣΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΣΠ, ΠΜ·
 ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΠΣ τῷ ἀπὸ ΞΣ. Κοινὸν προσκείσθω
 20 τὸ ἀπὸ ΠΣ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ ΠΣ, ΣΞ ἴσον.
 Ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΠΣ,
 ΣΞ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ ἀπὸ ΣΞ, ΣΠ, οὕτως ὁ ἐν
 τῷ κυλίνδρῳ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς ἀμφοτέρους
 τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ· ὥστε ἰσορροπήσῃ
 25 περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, αὐτοῦ
 μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ,
 ΠΡ, μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ,
 ὥστε ἐκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ.

4 κύκλον : om. || 13-14 [ἀμφότεροι — εἰσίν.] del. Heiberg ||
 21 ΠΣ : $\overline{\mu\sigma}$ || 24 ἰσορροπήσῃ : ἰσορροπήσουσι.

La somme des deux cercles de diamètres EO et HP , ainsi déplacés, aura dès lors¹ pour centre de gravité le point Θ ; il s'ensuit que le rapport de ΘA à AZ est égal au rapport du cercle de diamètre MN à la somme des deux cercles de diamètres EO et HP . On montrera de la même manière que, si on mène dans le parallélogramme AZ une autre parallèle à EZ et qu'on élève sur la droite ainsi menée un plan perpendiculaire à AF , le cercle déterminé dans le cylindre, restant en place, fera lui aussi équilibre autour du point A à la somme des deux cercles déterminés, l'un dans l'ellipsoïde, l'autre dans le cône, déplacés au point Θ du levier de manière que Θ soit le centre de gravité de chacun d'eux. Le cylindre, l'ellipsoïde et le cône étant remplis par les cercles pris ainsi, le cylindre, restant en place, fera donc équilibre autour du point A à l'ellipsoïde et au cône, déplacés et posés au point Θ du levier de manière que Θ soit le centre de gravité de chacune de ces figures. Le centre de gravité du cylindre² est le point K , le centre de gravité de l'ellipsoïde et du cône réunis est, comme nous l'avons dit, le point Θ ; le rapport du cylindre à la somme de l'ellipsoïde et du cône est donc égal au rapport de ΘA à AK . Mais $\text{A}\Theta$ est double de AK ; le cylindre est donc équivalent à la double somme de l'ellipsoïde et du cône, et un cylindre est équivalent à la somme de deux cônes et de deux ellipsoïdes. Or un cylindre est équivalent à trois de ces cônes³ ; trois cônes sont donc équivalents à la somme de deux cônes et de deux ellipsoïdes. Retranchons de part et d'autre deux cônes ; le cône restant, qui admet comme triangle passant par l'axe le triangle AEZ , est donc équivalent à deux ellipsoïdes. Mais un de ces cônes est équivalent à huit cônes admet-

1. En substituant, par la pensée, au $\delta\epsilon$ des mss., p. 95, l. 1, la particule $\delta\eta$; cf. Heiberg, *op. laud.* II, p. 451.

2. Cf. lemme 8.

3. Cf. Eucl. XII, 10.

- Συναμφοτέρων δὲ τῶν κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ $\Xi\Theta$, $\Pi\Gamma$, μετενηνεγμένων κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ · καὶ ὡς ἄρα ἢ $\Theta\Lambda$ πρὸς $\Lambda\Sigma$, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ MN , πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ
- 5 $\Xi\Theta$, $\Pi\Gamma$. Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΛZ παραλληλογράμμῳ παρὰ τὴν EZ , καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν $ΑΓ$, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ A σημεῖον αὐτοῦ μένων συναμφοτέροις τοῖς
- 10 κύκλοις τῷ τε ἐν τῷ σφαιροειδεῖ γινομένῳ καὶ τῷ ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσιν τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἐκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ . Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων καὶ τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου ἰσόρροπος ὁ κύλινδρος
- 15 ἔσται περὶ τὸ A σημεῖον αὐτοῦ μένων τῷ τε σφαιροειδεῖ καὶ τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἐκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ . Καί ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ K , τοῦ δὲ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου
- 20 συναμφοτέρων, ὡς ἔρρέθη, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ · ἔστιν οὖν ὡς ἢ $\Theta\Lambda$ πρὸς ΛK , ὁ κύλινδρος πρὸς ἀμφοτέρα τὰ τε σφαιρο(ειδὲς καὶ τὸν κώνον). Δ (ιπλα)σία δὲ ἢ $A\Theta$ τῆς ΛK · διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος ἀμφοτέρων τοῦ τε σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου · εἰς ἄρα κύλινδρος
- 25 ἴσος δυσὶν κώνοις καὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν. Εἰς δὲ κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τρισὶ κώνοις τοῖς αὐτοῖς · τρεῖς ἄρα κώνοι ἴσοι εἰσὶ δυσὶ κώνοις καὶ δυσὶ σφαιροειδέσι. Κοινοὶ ἀφηγήσθωσαν δύο κώνοι · λοιπὸς ἄρα εἰς κώνος, οὗ ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΛEZ , ἴσος ἐστὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν.
- 30 Εἰς δὲ κώνος ὁ αὐτὸς ἴσος ἐστὶν ὀκτὼ κώνοις, ὧν ἐστι

8 ὅτι : om. || 10 τῷ sec. : om. || 16 τεθεῖσιν : τεθείσης || 19 τοῦ κώνου : τῷ κώνῳ || 20 συναμφοτέρων : συναμφότερον || 26 τρισὶ : τρεῖς || 27 Κοινοὶ : κώνοις.

tant comme triangle passant par l'axe le triangle $AB\Delta$; il s'ensuit que huit des cônes indiqués sont équivalents à deux ellipsoïdes et que, par conséquent, quatre de ces cônes sont équivalents à un ellipsoïde ; l'ellipsoïde est donc équivalent au quadruple du cône ayant pour sommet le point A et pour base le cercle de diamètre $B\Delta$ perpendiculaire à AF , et la moitié de l'ellipsoïde est équivalente au double du cône indiqué.

Menons par les points B et Δ , dans le parallélogramme AZ , les parallèles ΦX et $\Psi\Omega$ à AF , et imaginons un cylindre ayant pour bases les cercles de diamètres $\Phi\Psi$ $X\Omega$ et pour axe le segment de droite AF .

Du moment donc que le cylindre, admettant comme parallélogramme passant par l'axe le parallélogramme $\Phi\Omega$, est double¹ du cylindre, admettant comme parallélogramme passant par l'axe le parallélogramme $\Phi\Delta$, parce que les bases de ces cylindres sont égales et l'axe de l'un double de celui de l'autre, et que le cylindre admettant comme parallélogramme passant par l'axe le parallélogramme $\Phi\Delta$ est équivalent au triple² du cône ayant pour sommet le point A et pour base le cercle de diamètre $B\Delta$ perpendiculaire à AF , le cylindre admettant comme parallélogramme passant par l'axe le parallélogramme $\Phi\Omega$ est sextuple du cône indiqué. Mais on a démontré que de ce même cône l'ellipsoïde est quadruple ; par conséquent, le cylindre est équivalent aux trois demis de l'ellipsoïde, ce qu'il fallait démontrer.

4.

Tout segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe est équivalent aux trois demis du cône ayant même base et même axe que le segment³ ; en appliquant la même méthode, on examine cette proposition de la manière que voici :

1. Cf. Eucl. XII, 13.

2. Cf. Eucl. XII, 10.

3. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 21.

τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ $ΑΒΔ$ · ὁκτὼ ἄρα κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσοι εἰσὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν · καὶ τέσσαρες ἄρα κῶνοι ἴσοι ἐνὶ σφαιροειδεῖ · τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ σφαιροειδὲς τοῦ κώνου, οὗ κορυφή μὲν ἐστὶ τὸ $Α$
 5 σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν $ΒΔ$ κύκλος ὀρθὸς ὦν πρὸς τὴν $ΑΓ$, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ εἰρημένου κώνου.

Ἦχθωσαν δὲ διὰ τῶν $Β, Δ$ σημείων ἐν τῷ $ΛΖ$ παραλληλογράμμῳ τῇ $ΑΓ$ παράλληλοι αἱ $ΦΧ, ΨΩ$, καὶ νοείσθω
 10 κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς $ΦΨ, ΧΩ$ κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ $ΑΓ$ εὐθεῖα.

Ἐπεὶ οὖν διπλάσιός ἐστὶν ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ $ΦΩ$, τοῦ κυλίνδρου, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ $ΦΔ$, διὰ
 15 τὸ ἴσας αὐτῶν εἶναι τὰς βάσεις, τὸν δὲ ἄξονα τοῦ ἄξονος διπλάσιον, αὐτὸς δὲ ὁ κύλινδρος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ $ΦΔ$, τριπλασίῳ ἐστὶ τοῦ κώνου, οὗ κορυφή μὲν τὸ $Α$ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν $ΒΔ$ κύκλος ὀρθὸς ὦν πρὸς τὴν $ΑΓ$, ἑξαπλάσιος ἄρα
 20 ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ $ΦΩ$, τοῦ εἰρημένου κώνου. Ἐδείχθη δὲ τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλάσιον τὸ σφαιροειδὲς · ἡμιόλιος ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ σφαιροειδοῦς · οἷ.

δ'.

25 Ὅτι δὲ πᾶν τμήμα ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἐπιπέδῳ ἀποτεμνόμενον ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα ἡμιόλιόν ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ τὸν ἄξονα τὸν αὐτόν, ὧδε διὰ τοῦ τρόπου τούτου θεωρεῖται.

7 διπλάσιόν : διπλάσιός || 10-11 $ΦΨ, ΧΩ$: $\overline{ΦΧ} \overline{ΨΩ}$ || 11 ἡ : $τῇ$ || εὐθεῖα : εὐθεία || 17 τριπλασίῳ : τριπλάσιον || 23 οἷ (hoc est ὅπερ ἔδει δεῖξαι) add. Heiberg || 24 δ' : om. || 25 ὀρθογωνίου : ὀρθογώνιον.

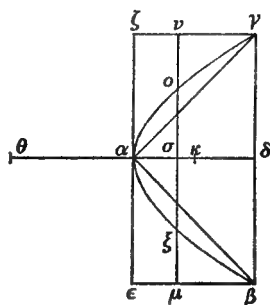


Fig. 124

Soit un parabolôïde ; coupons-le par un plan passant par l'axe ; que la parabole $AB\Gamma$ soit l'intersection de ce plan avec la surface du parabolôïde¹ ; coupons cette surface par un second plan, perpendiculaire à l'axe ; soit $B\Gamma$ la droite d'intersection des deux plans. Soit ΔA l'axe du segment ; prolongeons ΔA et prenons sur le prolongement le segment $A\Theta$ égal à $A\Delta$. Imaginons que $\Delta\Theta$ soit un levier de centre A . Que la base du segment soit le cercle de diamètre $B\Gamma$ perpendiculaire à $A\Delta$. Imaginons le cône ayant pour base le cercle de diamètre $B\Gamma$ et pour sommet le point A . Soit aussi un cylindre ayant pour base le cercle de diamètre $B\Gamma$ et pour axe le segment de droite $A\Delta$. Menons dans le parallélogramme (sc. $EB\Gamma\Delta$) une droite MN parallèle à $B\Gamma$, et élevons sur MN le plan perpendiculaire à $A\Delta$. Ce plan aura comme intersection, avec le cylindre un cercle de diamètre MN , avec le segment de parabolôïde un cercle de diamètre ΞO .

Puisque $BA\Gamma$ est une parabole de diamètre $A\Delta$, et que les droites $\Xi\Sigma$ et $B\Delta$ y sont menées d'une manière

1. Cf. *ibid.* 11.

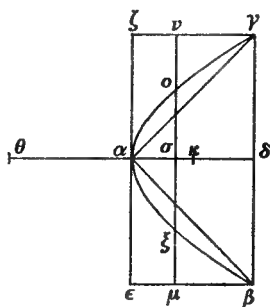


Fig. 124

Ἐστω γὰρ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ
 διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ
 ὀρθογωνίου κώνου τομὴν τὴν ΑΒΓ, τετμήσθω δὲ καὶ
 ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῶ πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ ἔστω αὐτῶν
 5 κοινὴ τομὴ ἡ ΒΓ, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμήματος ἡ ΔΑ, καὶ
 ἐκξεβλήσθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ,
 καὶ νοείσθω ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἔστω δὲ
 ἡ τοῦ τμήματος βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλος
 ὀρθὸς ὢν πρὸς <τὴν ΑΔ, νοείσθω δὲ κῶνος βάσιν> μὲν
 10 ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἐστὶ διάμετρος ἡ ΒΓ, κορυφὴν δὲ
 τὸ Α σημεῖον, ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων
 τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΒΓ, ἄξονα δὲ τὸν ΑΔ, καὶ
 ἦχθω τις ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ἡ ΜΝ παράλληλος
 οὔσα τῇ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν
 15 πρὸς τὴν ΑΔ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ
 τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ τμήματι τοῦ
 ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ
 ΞΟ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθογωνίου κώνου τομὴ ἐστὶν ἡ ΒΑΓ, διά-
 20 μετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΔ, καὶ τεταγμένως κατηγμέναι

3 ΑΒΓ : αὐτὸ || 5 ἔστω : ἔσται || 7 ζυγὸς : ὁ ζυγὸς || 10
 κορυφὴν : κορυφή || 19 ἐπεὶ : ἐπὶ || τομὴ : τομῆς.

ordonnée, le carré sur $B\Delta$ est au carré sur $\Xi\Sigma$ comme¹ ΔA est à $A\Sigma$; mais ΔA est égal à $A\Theta$; le carré sur $M\Sigma$ est donc au carré sur $\Sigma\Xi$ comme ΘA est à $A\Sigma$. Or le cercle, situé dans le cylindre, de diamètre MN est au cercle, situé dans le segment de paraboloïde, de diamètre ΞO comme le carré sur $M\Sigma$ est au carré sur $\Sigma\Xi$. Le cercle de diamètre MN est donc au cercle de diamètre ΞO comme² ΘA est à $A\Sigma$. Il s'ensuit que le cercle de diamètre MN situé dans le cylindre fera équilibre autour du point A , en restant en place, au cercle de diamètre ΞO , déplacé et posé sur le levier en Θ de manière que son centre de gravité soit le point Θ . Le centre de gravité du cercle de diamètre MN est ainsi³ le point Σ , le centre de gravité du cercle de diamètre ΞO , qui a été déplacé, est le point Θ , et le rapport de ΘA à $A\Sigma$ est inverse du rapport du cercle de diamètre MN au cercle de diamètre ΞO . On démontrera de la même manière que, si dans le rectangle EF on mène une autre parallèle à $B\Gamma$ et qu'on y élève un plan perpendiculaire à $A\Theta$, le cercle découpé dans le cylindre fera équilibre autour du point A , en restant en place, au cercle découpé dans le segment de paraboloïde, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière que son centre de gravité soit le point Θ . Par conséquent, le cylindre et le segment de paraboloïde étant remplis (sc. de cercles obtenus de la manière que nous venons de voir), le cylindre restant en place, fera équilibre autour du point A au segment de paraboloïde, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière que son centre de gravité soit le point Θ . Mais puisque les grandeurs indiquées se font équilibre autour du point A , que le centre de gravité du cylindre est le point K , par lequel

1. Cf. *Quadr. parab.*, 3.

2. Cf. *Eucl.* XII, 2.

3. Cf. lemme 7.

- είσιν αἱ $\Xi\Sigma$, $B\Delta$, ἔστιν ὡς ἡ ΔA πρὸς $A\Sigma$, οὕτως τὸ ἀπὸ $B\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Xi\Sigma$. Ἰση δὲ ἡ ΔA τῇ $A\Theta$ · ὥς ἄρα ἡ ΘA πρὸς $A\Sigma$, οὕτως τὸ ἀπὸ $M\Sigma$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Sigma\Xi$. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ $M\Sigma$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Sigma\Xi$, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ,
- 5 οὗ διάμετρος ἡ MN , πρὸς τὸν κύκλον τὸν ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς, οὗ διάμετρος ἡ ΞO · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘA πρὸς $A\Sigma$, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ MN , πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞO . Ἰσορροπος ἄρα ἡ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ MN , ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ περὶ
- 10 τὸ A σημεῖον αὐτοῦ μένων τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΞO , μετενεχθέντι καὶ τεθέντι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ , ὥστε κέντρον αὐτοῦ εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ · (καὶ ἐστι τοῦ) μὲν (κύκλου, οὗ διάμετρος ἔστιν ἡ) MN , κέντρον τοῦ βάρους τὸ Σ , τοῦ δὲ κύκλου, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ
- 15 ΞO , μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ , καὶ ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΘA πρὸς $A\Sigma$ ὃν ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ MN , πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞO . Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ $E\Gamma$ παραλληλογράμῳ παρὰ τὴν $B\Gamma$, καὶ ἀπὸ τῆς
- 20 ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν $A\Theta$, ὅτι ἰσορροπήσῃ πρὸς τῷ A σημείῳ ὁ γενομένος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ αὐτοῦ μένων τῷ γενομένῳ ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος μετενεχθέντι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους
- 25 τὸ Θ . Συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ τμήματος τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ A σημεῖον ὁ κύλινδρος αὐτοῦ μένων τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ .
- 30 Ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ περὶ τὸ A σημεῖον τὰ εἰρημένα μεγέθη, καὶ ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ K σημεῖον

le segment de droite $A\Delta$ est divisé en deux parties égales¹ et que, enfin, le centre de gravité du segment de paraboloïde déplacé est le point Θ , le rapport de ΘA à AK est inverse du rapport du cylindre au segment de paraboloïde. Or ΘA est double de AK ; le cylindre est donc équivalent au double du segment de paraboloïde ; mais le même cylindre est triple² du cône ayant pour base le cercle de diamètre $B\Gamma$ et pour sommet le point A . Il est donc évident que le segment de paraboloïde est équivalent aux trois demis de ce même cône.

5.

Dans le segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe, le centre de gravité est situé sur l'axe du segment, en un point qui divise l'axe indiqué de manière que la partie du côté du sommet soit double de la partie restante. Cette proposition est examinée par notre méthode de la manière que voici :

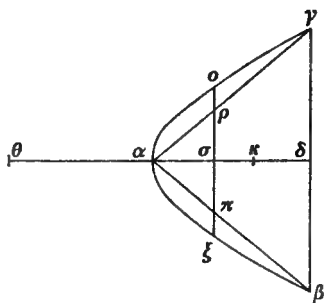


Fig. 125

1. Cf. lemme 8.

2. Cf. Eucl. XII, 10.

δίχα τεμνομένης τῆς $ΑΔ$ κατὰ τὸ $Κ$ σημεῖον, τοῦ δὲ τμήματος μετενηνεγμένου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τὸ $Θ$, ἀντιπεπονηθότως τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον <ἢ $ΘΑ$ πρὸς τὴν $ΑΚ$, ὃν ὁ> κύλινδρος πρὸς τὸ τμήμα. Διπλασία δὲ ἡ $ΘΑ$
 5 τῆς $ΑΚ$ · διπλασίος ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ τμήματος. Ὁ δὲ αὐτὸς κύλινδρος τριπλασίος ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ $ΒΓ$, κορυφὴν δὲ τὸ $Α$ σημεῖον · δῆλον οὖν ὅτι τὸ τμήμα ἡμιόλιόν ἐστιν τοῦ αὐτοῦ κώνου.

10

ε'.

Ὅτι δὲ τοῦ τμήματος τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τοῦ ἀποτεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῶ πρὸς τὸν ἄξονα τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣ ἐστὶν ἄξων τοῦ τμήματος, τμηθείσης οὕτως τῆς εἰρημένης εὐθείας,
 15 ὥστε διπλασίον εἶναι τὸ μέρος αὐτοῦ τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ λοιποῦ τμήματος, ὧδε διὰ τοῦ τρόπου θεωρεῖται ·

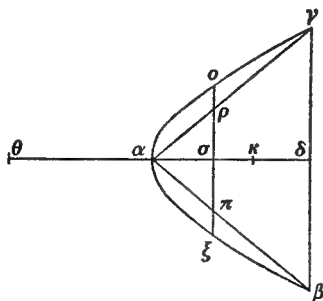


Fig. 125

1 δὲ : om. || 7 κορυφὴν : κορυφή || 10 ε' : om. || 12 τοῦ : om. |
 τὸν : τῶν || 15 τὸ alt. : om.

Soit un segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe ; coupons-le par un second plan, passant par l'axe, qui ait comme intersection avec la surface (sc. du paraboloïde) la parabole $AB\Gamma$; soit $B\Gamma$ la trace du plan sécant dans le plan qui découpe le segment, et $A\Delta$ l'axe du segment et le diamètre de la parabole $AB\Gamma$; prolongeons ΔA et portons sur le prolongement le segment de droite $A\Theta$ égal à ΔA ; imaginons que $\Delta\Theta$ soit un levier de centre A ; soit aussi un cône inscrit dans le segment, et BA et $A\Gamma$ deux de ses génératrices ; menons dans la parabole la parallèle ΞO à $B\Gamma$; que ΞO coupe la parabole aux points Ξ et O et les génératrices (sc. indiquées) du cône aux points Π et P .

Du moment donc qu'on a mené dans une parabole les perpendiculaires $\Xi\Sigma$ et $B\Delta$ au diamètre, le rapport de ΔA à $A\Sigma$ est égal¹ au rapport du carré sur $B\Delta$ au carré sur $\Xi\Sigma$. Or ΔA est à $A\Sigma$ comme² $B\Delta$ est à $\Pi\Sigma$, et $B\Delta$ est à $\Pi\Sigma$ comme le carré sur $B\Delta$ est au rectangle de côtés $B\Delta$ et $\Pi\Sigma$; il s'ensuit que le rapport du carré sur $B\Delta$ au carré de $\Xi\Sigma$ est lui aussi égal au rapport du carré sur $B\Delta$ au rectangle de côtés $B\Delta$ et $\Pi\Sigma$. Le carré sur $\Xi\Sigma$ est donc équivalent³ au rectangle de côtés $B\Delta$ et $\Pi\Sigma$; par conséquent, les segments de droite $B\Delta$, $\Sigma\Xi$ et $\Sigma\Pi$ sont proportionnels⁴, d'où il suit que le rapport de $B\Delta$ à $\Pi\Sigma$ est égal au rapport du carré sur $\Xi\Sigma$ au carré sur $\Sigma\Pi$. Mais $B\Delta$ est à $\Pi\Sigma$ comme ΔA est à $A\Sigma$, c'est-à-dire comme ΘA est à $A\Sigma$; il s'ensuit que ΘA est à $A\Sigma$ comme le carré sur $\Xi\Sigma$ est au carré sur $\Sigma\Pi$. Élevons dès lors sur ΞO un plan perpendiculaire à $A\Delta$; ce plan déterminera donc, dans le segment de paraboloïde le cercle de diamètre ΞO , et dans le cône le cercle de diamètre ΠP . Et du moment

1. Cf. *Quadr. parab.*, 3.

2. Cf. *Eucl.* VI, 4.

3. Cf. *Eucl.* V, 9.

4. Cf. *Eucl.* VI, 17.

- Ἐστω τμήμα ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἀποτεμνόμενον ἐπιπέδῳ ὀρθῶ πρὸς τὸν ἄξονα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἑτέρῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομήν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομήν, τοῦ δὲ ἀποτετμηκότος
- 5 τὸ τμήμα ἐπιπέδου καὶ τοῦ τέμνοντος κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΒΓ, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς ΑΒΓ τομῆς ἡ ΑΔ εὐθεΐα, καὶ τῆς <ΔΑ ἐκβληθείσης ἴση αὐτῇ κείσθω ἡ ΑΘ, καὶ> νοείσθω ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἔστω δὲ καὶ κῶνος ἐγγεγραμμένος ἐν τῷ
- 10 τμήματι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ αἱ ΒΑ, ΑΓ, ἤχθω δὲ τις ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ ἡ ΕΞ παράλληλος οὔσα τῇ ΒΓ, τεμνέτω δὲ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομήν κατὰ τὰ Ε, Ο, τὰς δὲ τοῦ κώνου πλευρὰς κατὰ τὰ Π, Ρ σημεία.
- 15 Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομῇ κάθετοι ἡγμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὴν διάμετρον αἱ ΕΞ, ΒΔ, ἔστιν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΞ. Ὡς δὲ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΠΣ ἔσται ἄρα καὶ ὡς
- 20 τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔ, ΠΣ. Ἰσὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΞ τῷ ὑπὸ ΒΔ, ΠΣ ἄναλογον ἄρα εἰσὶν αἱ ΒΔ, ΣΞ, ΣΠ, καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ. Ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, τουτέστιν
- 25 ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ. Ἀνεστάτω δὲ ἀπὸ τῆς ΕΞ ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΕΞ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ. Καὶ ἐπεὶ ἐστίν

1 ὀρθογωνίου : ὀρθογώνιον || 5 τέμνοντος : τμήματος. || 21 τῷ : τὸ || 27 δὴ : δὲ..

que ΘA est à $A\Sigma$ comme le carré sur $\Xi\Sigma$ est au carré sur $\Sigma\Pi$, et que le carré sur $\Xi\Sigma$ est au carré sur $\Sigma\Pi$ comme¹ le cercle de diamètre ΞO est au cercle de diamètre ΠP , le rapport de ΘA à $A\Sigma$ sera égal au rapport du cercle de diamètre ΞO au cercle de diamètre ΠP . Le cercle de diamètre ΞO , restant en place, fera donc équilibre autour du point A au cercle de diamètre ΠP , déplacé au point Θ du levier de manière que Θ soit son centre de gravité. Du moment donc que le cercle de diamètre ΞO , restant en place, a pour centre de gravité² le point Σ , que le cercle de diamètre ΠP , déplacé de la manière indiquée, a pour centre de gravité le point Θ , et que ΘA est à $A\Sigma$ dans le rapport inverse du rapport entre le cercle de diamètre ΞO et le cercle de diamètre ΠP , ces cercles se feront équilibre au point A . On démontrera de la même manière que, si on mène dans la parabole une autre parallèle à BF et qu'on élève sur la parallèle menée un plan perpendiculaire à $A\Delta$, le cercle, déterminé dans le paraboloïde, restant en place, fera équilibre autour du point A au cercle, déterminé dans le cône, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière que son centre de gravité soit Θ . Le segment et le cône étant ainsi remplis par les cercles, tous les cercles dans le segment, restant en place, feront équilibre autour du point A à tous les cercles dans le cône, déplacés et posés sur le levier au point Θ de manière que leur centre de gravité soit Θ ; le segment de paraboloïde, restant en place, fera donc lui-même équilibre autour du point A au cône, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière

1. Cf. Eucl. XII, 2.

2. Cf. lemme 7.

- ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ,
- 5 πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ. Ἰσορροπήσει ἄρα περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, αὐτοῦ μένων τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ,
- 10 αὐτοῦ μένοντος κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Σ, τοῦ δὲ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντος ὡς ἐρρέθη κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, καὶ ἀντιπεπονητόως τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ὃν ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, ἰσορρο-
- 15 πήσουσιν ἄρα πρὸς τῷ Α σημείῳ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος αὐτοῦ μένων
- 20 ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α σημεῖον τῷ γενομένῳ κύκλῳ ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντων οὖν ὑπὸ τῶν κύκλων τοῦ τε τμήματος καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσουσι περὶ τὸ Α σημεῖον τεθέντες πάντες
- 25 οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ τμήματι αὐτοῦ μένοντες πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθείσι τοῦ ζυγοῦ <κατὰ τὸ ■ σημεῖον οὕτως, ὥστε> αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ ἰσόρροπον οὖν καὶ τὸ τμήμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος περὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένον
- 30 τῷ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ

- οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν συναμφοτέρων τῶν μεγεθῶν ὡς ἑνὸς λεγομένων κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Α, αὐτοῦ δὲ τοῦ κώνου τοῦ μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, τοῦ λοιποῦ ἄρα μεγέθους
- 5 τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΑΘ εὐθείας ἐκβεβλημένης ἐπὶ τὸ Α καὶ ἀποληφθείσης ἀπ' αὐτῆς τῆς ΑΚ τηλικαύτης, (ὥστε τὴν ΑΘ) πρὸς αὐτὴν τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τμήμα πρὸς τὸν κώνον. Ἡμιόλιον
- 10 ἥ ἐστιν τὸ τμήμα τοῦ κώνου ἡμιόλιος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ, καὶ ἐστὶν τὸ Κ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τῆς ΑΔ τετμημένης οὕτως, ὥστε διπλάσιον εἶναι τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος τοῦ λοιποῦ τμήματος.

ζ'.

- 15 Παντὸς ἡμισφαιρίου τὸ κέντρον <τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐστίν, ἥ> ἐστὶν ἄξων αὐτοῦ, τμηθείσης οὕτως, ὥστε τὸ τμήμα αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς τὸ λοιπὸν τμήμα τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ πέντε πρὸς τὰ τρία.

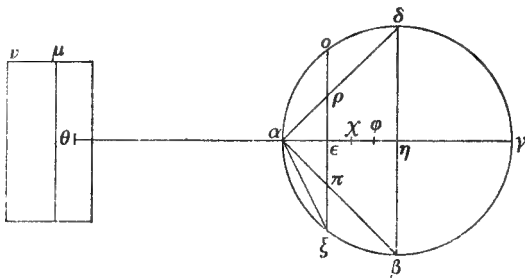


Fig. 126

6 ἀποληφθείσης ἀπ' : ἀποληφθεῖσα || 14 ζ' om.

Soit une sphère ; coupons-la par un plan passant par son centre ; que l'intersection de ce plan avec la surface soit le cercle $AB\Gamma\Delta$; soit $A\Gamma$ et $B\Delta$ deux diamètres de ce cercle perpendiculaires l'un à l'autre ; élevons sur $B\Delta$ un plan perpendiculaire à $A\Gamma$; soit un cône ayant pour base le cercle de diamètre $B\Delta$ et pour sommet le point A , et BA et $A\Delta$ deux de ses génératrices ; prolongeons ΓA et portons sur le prolongement le segment de droite $A\Theta$ égal à ΓA ; imaginons que $\Theta\Gamma$ soit un levier de centre A et menons dans le demi-cercle $BA\Delta$ la droite ΞO parallèle à $B\Delta$; que cette droite coupe la circonférence du demi-cercle aux points Ξ et O , les génératrices du cône aux points Π et P , et la droite $A\Gamma$ au point E ; sur ΞO élevons le plan perpendiculaire à AE ; ce plan coupera l'hémisphère suivant le cercle de diamètre ΞO et le cône suivant le cercle de diamètre ΠP .

Comme $A\Gamma$ est à AE comme¹ le carré sur ΞA est au carré sur AE , que le carré sur ΞA est équivalent à la somme des carrés² sur AE et sur $E\Xi$, et que AE est égal³ à $E\Pi$, le rapport de $A\Gamma$ à AE est égal au rapport de la somme des carrés sur ΞE et sur $E\Pi$ au carré sur $E\Pi$. Mais le rapport de la somme des carrés sur ΞE et sur $E\Pi$ au carré sur $E\Pi$ est égal au rapport de la somme du cercle de diamètre ΞO et du cercle de diamètre ΠP au cercle de diamètre ΠP , et ΓA est égal à $A\Theta$; le rapport de ΘA à AE est donc égal au rapport de la somme du cercle de diamètre ΞO et du cercle de diamètre ΠP au cercle de diamètre ΠP . Il s'ensuit que la somme des deux cercles de diamètres ΞO et ΠP , restant en place, fera équilibre autour du point A au cercle de diamètre ΠP , déplacé et posé au point Θ .

1. Cf. Eucl. III, 31 ; V, déf. 9 ; VI, 8.

2. Cf. Eucl. I, 47.

3. Cf. Eucl. VI, 4.

Ἐστω σφαῖρα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ γενέσθω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, διαμέτροι δὲ ἕστωσαν τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς ΒΔ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς
 5 τὴν ΑΓ, καὶ ἕστω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, πλευραὶ δὲ ἕστωσαν τοῦ κώνου αἱ ΒΑ, ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ἡ ΘΓ εὐθεῖα, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ ΒΑΔ
 10 ἡμικυκλίῳ ἡ ΞΟ παράλληλος οὔσα τῇ ΒΔ, τεμνέτω δὲ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρειαν κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὰς δὲ τοῦ κώνου πλευρὰς κατὰ τὰ Π, Ρ σημεία, τὴν δὲ ΑΓ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τῆς ΞΟ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΕ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ ἡμισφαίριῳ
 15 τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΑΕ, τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τῷ δὲ ἀπὸ ΞΑ ἴσα τὰ ἀπὸ <ΑΕ, ΕΞ, τῇ δὲ ΑΕ ἴση ἡ ΕΠ, ὡς ἄρα ἡ ΑΓ> πρὸς ΑΕ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΠ
 20 πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΠ. Ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΠ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ, καὶ ἔστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ ἴση· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΞΟ
 25 καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ. Ἰσορροπήσουσιν ἄρα περὶ τὸ Α σημεῖον ἀμφοτέρω οἱ κύκλοι, ὧν εἰσι διαμέτροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, αὐτοῦ μένοντες τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντι καὶ τεθέντι κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον

5 βάσιν : βαδάσιν || 11 τὴν : τῆς || 18 ἀπὸ pr. suppl. Heiberg || 20 τὰ : τὸ || 21-22 τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον suppl. Heiberg || 24-25 περὶ διάμετρον τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ suppl. Heiberg || 27 ὧν : om..

de manière que Θ soit son centre de gravité. Du moment donc que de la somme des deux cercles de diamètres ΞO et ΠP , restant en place, le centre de gravité¹ est le point E , et que Θ est le centre de gravité du cercle de diamètre ΠP , déplacé, le rapport de EA à $A\Theta$ est égal au rapport du cercle de diamètre ΠP à la somme des cercles de diamètres ΞO et ΠP . De même, si on mène dans la parabole une autre parallèle à la droite $BH\Delta$ et qu'on élève sur la droite ainsi menée le plan perpendiculaire à AT , la somme des deux cercles déterminés, l'un dans l'hémisphère, l'autre dans le cône, restant en place, fera équilibre autour de A au cercle déterminé dans le cône, déplacé et posé sur le levier au point Θ . Dès lors, l'hémisphère et le cône étant remplis par les cercles, tous les cercles dans l'hémisphère et dans le cône, restant en place, feront équilibre autour du point A à tous les cercles dans le cône, déplacés et posés au point Θ du levier de manière que leur centre de gravité soit Θ ; par conséquent, la somme de l'hémisphère et du cône, restant en place, feront équilibre autour du point A au cône, déplacé et posé au point Θ du levier de manière que son centre de gravité soit Θ . Soit² donc un cylindre MN suspendu au point Θ , équivalent au cône $AB\Delta$; que ce cylindre soit coupé par un plan perpendiculaire à l'axe de manière que le cylindre (sc. partiel) M fasse équilibre au cône autour du point A ; la partie restante, (sc. le cylindre) N , fera donc équilibre à l'hémisphère. Prenons sur AH un point Φ tel que $A\Phi$ soit triple de ΦH ; le point Φ sera donc le centre de gravité du cône³. Mais prenons aussi un point X tel que AH soit à AX comme huit est à cinq. Du moment donc que le cylindre M fait équilibre au cône $AB\Delta$ autour du point A , le rapport du cylindre M au cône $AB\Delta$ sera égal au rapport de ΦA à ΘA , c'est-à-dire de trois à huit. Mais le cône $AB\Delta$ est équivalent au cylindre MN ; il s'ensuit que le cylindre MN est au cylindre M comme huit

1. Cf. lemme 7.

2-3. Cf. notes complémentaires.

- εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν ἀμφοτέρων μὲν
 τῶν κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΞO , ΠP , αὐτοῦ μενόντων
 κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν \langle τὸ E , τοῦ δὲ κύκλου, οὗ ἐστι
 διάμετρος ἡ ΠP , μετενεχθέντος τὸ Θ, ἔστιν ὡς ἡ EA πρὸς
 5 $\text{A}\Theta$, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΠP , πρὸς τοὺς
 κύκλους, ὧν διάμετροι αἱ ΞO , $\langle \Pi\text{P} \rangle$. Ὅμοίως δὲ καὶ ἐὰν
 ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ παράλ-
 ληλος τῇ $\text{B}\langle\text{H}\rangle\Delta$, καὶ \langle ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον
 ἀναστα \rangle θῇ ὀρθὸν πρὸς \langle τὴν AG \rangle , ἰσορροπ \langle ήσουσιν \rangle
 10 περὶ τὸ A \langle σημεῖον \rangle ἀμφότερ \langle οι οἱ κύκλοι ὃ τε ἐν τῷ
 ἡμισφαίριῳ γενόμεν \langle ος \rangle κ \langle αὶ ὁ ἐν τῷ κώνῳ \rangle αὐ \langle τοῦ
 μένοντες τῷ γ \rangle ενομένῳ \langle κύκλῳ ἐν τῷ κώνῳ \rangle μετενεχθέντι
 \langle καὶ \rangle τε \langle θέντι τοῦ \rangle ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ. \langle Συμπληρωθέντων
 οὖν ὑπὸ τῶν κύκλων τοῦ τε \rangle ἡμισφαίριου καὶ τοῦ κώ \langle νου \rangle
 15 ἰσορ \langle ροπήσουσι περὶ τὸ A σημεῖον πάντες οἱ κύκλοι
 οἱ ἐν τῷ ἡμισφαί \rangle ρίῳ καὶ οἱ \langle ἐν τῷ κώνῳ αὐτοῦ \rangle μένοντες
 \langle πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν \rangle τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ
 τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον \langle εἶναι
 αὐτῶν \rangle τοῦ βάρους τὸ \blacksquare . \langle ὥστε ἰσορροπήσουσι περὶ
 20 τὸ A σημεῖον τό τε ἡμισφαίριον καὶ ὁ κώνος αὐτοῦ \rangle
 μένοντα τῷ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ τεθέντι \langle τοῦ ζυγοῦ
 κατὰ τὸ Θ \rangle οὕτως, ὥστε κέν \langle τρον \rangle αὐτοῦ \langle εἶναι τοῦ
 βάρους \rangle τὸ \blacksquare σημεῖον δ ἔλασσον

 25
 τῶν δὲ \langle ἰσορροπ \rangle ού \langle ντ \rangle ων κατὰ
 τὸ $\langle \text{A} \rangle$ τρ τὸ \langle καὶ ἐπεὶ \rangle ἐστίν,

est à trois et que, par conséquent, le cylindre N est au cylindre MN comme cinq est à huit¹, ou que le cône $AB\Delta$ est au cylindre N comme huit est à cinq, c'est-à-dire comme AH est à AX. Et comme la sphère est équivalente au quadruple² du cône ayant pour base le cercle de diamètre $B\Delta$ et pour axe AH, le rapport de l'hémisphère au cône $AB\Delta$ sera égal au rapport de deux à un, c'est-à-dire de $A\Theta$ à AH. Par identité³ donc, le rapport de l'hémisphère au cylindre N est égal au rapport de $A\Theta$ à AX. De plus, le cylindre N, de centre de gravité Θ , fait équilibre à l'hémisphère autour du point A ; il s'ensuit que le centre de gravité de l'hémisphère est le point X qui divise l'axe de manière que la partie située du côté de la surface de l'hémisphère ait à la partie restante le rapport de cinq à trois.

7.

Cette méthode s'applique aussi à la proposition suivante : Le rapport de tout segment de sphère au cône ayant la même base et le même axe que le segment est égal au rapport entre la somme du rayon de la sphère

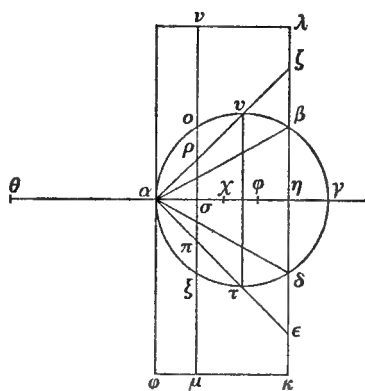


Fig. 127

et de la hauteur du segment restant, d'une part, et la hauteur du segment restant d'autre part¹.

Soit², en effet, une sphère, $AB\Gamma\Delta$ un grand cercle, $A\Gamma$ et $T\Upsilon$ deux diamètres perpendiculaires ; coupons la sphère par un plan perpendiculaire à $A\Gamma$, découpant un segment ayant pour base le cercle de diamètre $B\Delta$; soit H le point d'intersection entre $B\Delta$ et $A\Gamma$; construisons sur ce cercle (sc. comme base) un cône de sommet A . Construisons en outre sur le cercle de diamètre $T\Upsilon$ un cône ayant le même sommet et prolongeons sa surface ; que l'intersection de ce cône avec le plan mené par $B\Delta$ soit le cercle de diamètre EZ ; décrivons dans le même plan autour de H comme centre et avec un rayon égal à $A\Gamma$ le cercle de diamètre $K\Lambda$, et construisons sur ce cercle un cylindre ayant pour axe AH et admettant comme parallélogramme passant par l'axe le parallélogramme $\Phi\Lambda$. Prolongeons $A\Gamma$ des deux côtés, et portons sur le prolongement, d'un côté $\Gamma\Omega$ égal au rayon de la sphère, de l'autre côté $A\Theta$ égal à $A\Gamma$; imaginons que $\Gamma\Theta$ soit un levier de centre A .

Menons dès lors dans le parallélogramme $\Phi\Lambda$ la droite MN parallèle à $B\Delta$ et élevons sur MN le plan perpendiculaire à $A\Gamma$; ce plan coupera le cylindre suivant le cercle de diamètre MN , le segment de sphère suivant le cercle de diamètre EO , et le cône ayant pour base le cercle de diamètre EZ et pour sommet le point A suivant le cercle de diamètre ΠP . Dans ces conditions, on montrera comme précédemment que le cercle de diamètre MN , restant en place, fera équilibre autour du point A à la somme des deux cercles de diamètres EO et ΠP , déplacés et posés sur le levier au point Θ de manière que le point Θ soit le centre de gravité de chacun d'eux ; mais on ferait le même raisonnement pour tous les cercles. Le cylindre, le cône et le segment de sphère étant remplis par les cercles, le cylindre, restant en place, fera donc à son tour équilibre à la

πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος>.....
 τῷ
 ὀρθῇ τὸ αὐτὸ

- 5παρὰ
 <καὶ ἀπὸ τῆς> MN ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς
 τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν
 κύκλον, οὗ ἐστὶ διάμετρος ἡ MN, ἐν δὲ τῷ τμήματι τῆς
 σφαίρας τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΕΟ, ἐν δὲ τῷ
 10 κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλος, κορυφή
 δὲ τὸ Α σημεῖον, κύκλον, οὗ διάμετρος ἐστὶν ἡ ΠΡ.
 Ὅμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἰσόρροπος περὶ
 τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ MN, αὐτοῦ μένων
 ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις, ὧν διαμέτροι αἱ ΕΟ, ΠΡ,
 15 μετεν>εχθεῖσι τοῦ ζυγοῦ <κατὰ τὸ Θ,> ὥστε ἑκατέρου
 αὐτῶν κέντρον <τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ· ὁμοίως> δὲ <ἐπὶ
 πάντων>. Συμπληρωθέντων οὖν καὶ τοῦ κυλίνδρου καὶ
 τοῦ <κώνου καὶ τοῦ> τμήματος <τῆς σφαίρας ὑπὸ τῶν
 κύκλων ἰσορροπήσει καὶ> ὁ κύλινδρος αὐτοῦ μένων

somme du cône et du segment de sphère, déplacés et posés sur le levier au point Θ . Divisons AH par les points Φ et X de manière que AX soit égal à XH et que $H\Phi$ soit égal au tiers de AH ; le cylindre aura alors pour centre de gravité le point¹ X comme étant le milieu de l'axe AH . Du moment donc que les grandeurs indiquées se font équilibre autour du point A , le rapport du cylindre à la somme du cône, dont la base a pour diamètre EZ , et du segment de sphère $B\Delta$ est égal au rapport de ΘA à AX . Comme, d'autre part, HA est triple de $H\Phi$, le rectangle de côtés ΓH et $H\Phi$ est équivalent au tiers du rectangle de côtés AH , $H\Gamma$. Or le rectangle de côtés AH et $H\Gamma$ est équivalent² au carré sur HB ; il s'ensuit que le rectangle de côtés ΓH et $H\Phi$ est aussi équivalent au tiers du carré sur BH . Le carré sur AH est, d'autre part, équivalent au triple du rectangle de côtés AH et $H\Phi$, c'est-à-dire au triple du rectangle de côtés AX et $A\Phi$, parce que AH est double de AX , et $A\Phi$ double de ΦH . De plus³, puisque ΘA est égal à KH et AH égal à HE , le rapport du carré sur ΘA au tiers du carré sur AH sera égal au rapport du cylindre, ayant pour base le cercle de diamètre $K\Lambda$, au cône AEZ . En outre, le rapport du carré sur ΘA au tiers du carré sur AH est égal au rapport du carré sur ΘA au rectangle de côtés AX et $A\Phi$; il s'ensuit que le rapport du carré sur ΦA au rectangle de côtés AX et $A\Phi$ est égal au rapport du cylindre au cône. Mais nous avons aussi démontré que le rapport entre le cylindre, ayant pour base le cercle de diamètre $K\Lambda$, et la somme du segment de sphère $A\Delta$ et du cône est égal au rapport de ΘA à AX ; de plus³, ΘA est égal à $A\Gamma$, c'est-à-dire égal à la somme de $A\Phi$ et de $\Phi\Gamma$; il s'ensuit que le rapport entre le carré sur ΘA et la somme des rectangles de côtés

1. Cf. lemme 8.

2. Cf. Eucl. VI, 8, coroll.; VI, 17.

3. Raisonnement reconstitué par Heiberg.

- συναμφοτέροις τῷ τε κώνῳ καὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας
 μετενηνεγμένοις καὶ κειμένοις τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ.
 Τεμνέσθω δὲ ἡ ΑΗ κατὰ τὰ Φ, Χ σημεῖα οὕτως ὥστε τὴν
 μὲν ΑΧ εἶναι ἴσην τῇ ΧΗ, τὴν δὲ ΗΦ τρίτον μέρος τῆς
 5 ΑΗ · ἔσται δὴ τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους
 τὸ Χ διὰ τὸ διχοτομίαν εἶναι τοῦ ΑΗ ἄξονος. Ἐπεὶ οὖν
 ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖον τὰ εἰρημένα μεγέθη, ἔσται
 ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς ἀμφοτέρων τὸν τε κώνον, οὐ διάμετρος
 τῆς βάσεως ἡ ΕΖ, καὶ τὸ τμήμα τῆς σφαίρας τὸ ΒΑΔ,
 10 οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΧ. Καὶ ἐπεὶ <τριπλ>ασία ἐστὶν ἡ
 ΗΑ τῆς ΗΦ, τρίτον μέρος ἐστὶν <τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΦ τοῦ ὑπὸ
 ΑΗ, ΗΓ. Ἰσον δέ> τῷ ὑπὸ ΑΗ, ΗΓ τὸ ἀπὸ ΗΒ · ἔσται δὴ
 καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΗ τρίτον μέρος τὸ ὑπὸ ΓΗ, <ΗΦ> . . .
 ὑπὸ ΗΓ . . . τὸ δὲ ἀπὸ ΑΗ
 15 ὑπὸ ΗΓ
 τῆς ΚΛ
 τρον οὕτως <ὁ κύλινδρος, οὐ
 βάσις ὁ περὶ> διάμετρον <τὴν.. κύκλος> πρὸς τὸν
 <ὁ κύλινδρος, οὐ> βάσις <. . . ὁ περὶ> διάμετρον
 20 τὴν ΚΛ κύκλος πρὸς τὸν ΑΕΖ κώνον. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΑ
 πρὸς ἄρα ἡ πρὸς τὸν
 κώνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ <ὡς ἡ ΘΑ> πρὸς ΑΧ, οὕτως ὁ
 κύλινδρος, οὐ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ κύκλος
 <πρὸς τὸ> τμήμα <τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΔ καὶ τὸν> κώνον ·
 25 καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς συναμφοτέρας τὰς Φ .
 τὸ ΑΒΔ <τμήμα τῆς σ>φαίρ<ας> . . .
 τα καὶ ὃ τε
 ὡς τὸ
 ΑΒΔ τμήμα πρὸς τὸν κύλινδρον, οὐ ἐστὶ βάσις ὁ περὶ
 30 διάμετρον τὴν . . κύκ<λος>, ἄξων <δὲ ὁ> α<ν>τός, οὕτως>

3 ΑΗ : ΑΓ || 8-9 οὐ διάμετρος τῆς βάσεως suppl. Heiberg ||
 11 ΗΦ : ΑΦ || 12 ΗΓ τὸ ἀπὸ suppl. Heiberg || 23 οὐ βάσις suppl.
 Heiberg || 25 ὡς : : om.

$A\Phi$, AX et $\Phi\Gamma$, AX est égal au rapport du cylindre à la somme du segment $AB\Delta$ et du cône AEZ . Le rapport du cylindre au segment de sphère sera donc égal au rapport du carré sur ΘA au rectangle de côtés $\Phi\Gamma$ et AX . Mais le rapport du cylindre au cône $AB\Delta$ est égal au rapport du carré sur ΘA au tiers du carré sur BH , et ce dernier rapport est égal au rapport du carré sur ΘA au rectangle de côtés ΓH et $H\Phi$; il s'ensuit que le rapport du segment $AB\Delta$ au cône $AB\Delta$ est égal au rapport du rectangle de côtés $\Phi\Gamma$ et AX au rectangle de côtés ΓH et $H\Phi$. Et comme AH est égal au double de AX , à la somme de $A\Phi$ et de ΦH , et au triple de ΦH , et que $\Phi\Gamma$ est égal à la somme de ΦH et de $H\Gamma$ et à la somme du tiers de AH et de $H\Gamma$, le rectangle de côtés $\Phi\Gamma$ et AX sera équivalent à la somme du rectangle ayant pour côtés le tiers de AH et les trois demis de ΦH et du rectangle ayant pour côtés $H\Gamma$ et les trois demis de ΦH ; cette dernière somme étant équivalente au rectangle ayant pour côtés ΦH et la somme de la moitié de $A\Gamma$ et de $H\Gamma$ et, par conséquent, équivalente au rectangle de côtés ΦH et $H\Omega$, le rapport du segment $AB\Delta$ au cône $AB\Delta$ est égal au rapport de $H\Omega$ à $H\Gamma$.

8.

De la même manière la méthode s'applique aussi dans le théorème que voici : le rapport de tout segment d'ellipsoïde, découpé par un plan perpendiculaire, au cône ayant même base et même axe que le segment est égal au rapport entre la somme de la moitié de l'axe de l'ellipsoïde et de l'axe du segment opposé, d'une part, et l'axe du segment opposé, d'autre part¹.

9.

Dans tout segment de sphère, le centre de gravité est situé sur l'axe du segment, en un point qui divise

1. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, 29 et 31.

.....Χ πρὸς.....ὦ(ς δὲ ὁ) κύλινδρος, οὗ βάσις
 (ὁ περὶ διάμετρον) τὴν Κ(Λ κύκλος, πρὸς τὸν) ΑΒΔ
 κῶνον, (οὕτως).....τω.....πρὸς... Β..
η. Φ.....ὡς ἡ.....
 5 ἡ Α. Τῇ.....
καὶ ἡ ΗΓ καὶ.....

η'.

10 (Ὅμοίως δὲ θεωρεῖται) διὰ τοῦ (αὐτοῦ τρόπου καὶ ὅτι)
 πᾶν τμήμα (σφαιροειδέος) ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ
 πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι
 καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει
 συναμφότερος ἢ τε ἡμίσεια τοῦ ἄξονος τοῦ (σ)φαι-
 ρο(ειδέος) καὶ (τοῦ ἄξονος) τοῦ (ἀντι)κειμένου (τμήμα-
 τος) πρὸ(ς τὸν ἄξονα τοῦ ἀντικειμένου τμήματος).

15

θ'.

(Παντὸς τμήματος σφαίρας τὸ κέντρον τοῦ βάρους
 ἐστὶν ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣ ἐστὶν ἄξων τοῦ τμήματος, διηρη-

l'axe de manière que le rapport de la partie du côté du sommet du segment à la partie restante soit égal au rapport entre la somme de l'axe du segment et du quadruple de l'axe du segment opposé, d'une part, et la somme de l'axe du segment et du double de l'axe du segment opposé.

Soit¹ une sphère ; découpons-en un segment par un plan perpendiculaire ; que l'intersection de la sphère avec un autre plan, passant par son centre, soit le cercle $AB\Gamma\Delta$; soit $B\Delta$ la trace du plan sécant dans le plan découpant le segment, ΓA le diamètre perpendiculaire à $B\Delta$, H le point d'intersection de ΓA et de $B\Delta$; le segment de sommet A aura ainsi pour axe AH , et l'axe du segment opposé sera $H\Gamma$. Coupons AH par le point X de manière que le rapport de AX à XH soit égal au rapport de la somme de AH et du quadruple de $H\Gamma$ à la somme de AH et du double de $H\Gamma$. Je dis que le centre de gravité du segment de sommet A est le point X ...².....
 ...prolongeons $A\Gamma$ (sc. des deux côtés) et portons sur le prolongement, d'un côté $A\Theta$, égal à $A\Gamma$, de l'autre

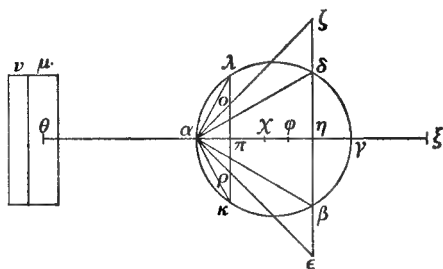


Fig. 128

1. Trois lignes du raisonnement reconstituées par Heiberg d'après la prop. 10.

2. Il a été impossible jusqu'à présent de combler cette lacune.

côté $\Gamma\Xi$, égal au rayon de la sphère ; imaginons que $\Gamma\Theta$ soit un levier de centre A et décrivons, dans le plan découpant le segment, un cercle autour de H comme centre et avec un rayon égal à AH ; sur ce cercle construisons un cône de sommet A ; soit AE et AZ les génératrices de ce cône (sc. situées dans le plan sécant). Menons la parallèle $K\Lambda$ à EZ , et soit K et Λ ses points d'intersection avec la circonférence du segment, P et O ses points d'intersection avec les génératrices du cône AEZ , et Π son point d'intersection avec $A\Gamma$. Dès lors, comme $A\Gamma$ est à $A\Pi$ comme¹ le carré sur KA est au carré sur $A\Pi$, que le carré sur KA est équivalent² à la somme des carrés sur $A\Pi$ et sur ΠK , que le carré sur $A\Pi$ est égal au carré sur ΠO , que, de plus, le carré sur AH est égal au carré sur EH , le rapport de ΓA à $A\Pi$ est égal au rapport de la somme des carrés sur $K\Pi$ et sur ΠO au carré sur $O\Pi$. Mais le rapport de la somme des carrés sur $K\Pi$ et sur ΠO au carré ΠO est égal au rapport du cercle de diamètre $K\Lambda$ augmenté du cercle de diamètre OP au cercle de diamètre OP , et ΓA est égal à $A\Theta$; il s'ensuit que le rapport de ΘA à $A\Pi$ est égal au rapport de la somme des deux cercles de diamètres $K\Lambda$ et OP au cercle de diamètre OP . Du moment donc que le rapport de la somme des cercles de diamètres $K\Lambda$ et OP au cercle de diamètre OP est égal au rapport de $A\Theta$ à ΠA , déplaçons le cercle de diamètre OP et posons-le sur le levier au point Θ de manière que Θ soit son centre de gravité ; alors le rapport de ΘA à $A\Pi$ sera égal au rapport de la somme des cercles de diamètres $K\Lambda$ et OP , restant en place, au cercle de diamètre OP , déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière que Θ soit son centre de gravité ; les deux cercles, celui qui est dans le segment $B\Lambda\Delta$ et celui qui est dans le cône AEZ feront par conséquent équilibre autour du point A au cercle dans le cône

1. Cf. Eucl. III, 31 ; VI, 8, coroll. ; V, déf. 9.

2. Cf. Eucl. I, 47.

ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου
 τῆς σφαίρας ἴση ἡ ΓΞ, καὶ νοείσθω ζυγὸς ἡ ΓΘ, μέσον
 δὲ αὐτοῦ τὸ Α, γεγράφθω δὲ καὶ κύκλος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ
 τῷ ἀποτεμνοντι τὸ τμήμα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι
 5 δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΑΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου <γεγράφθω
 κῶνος κορυφὴν ἔχων τὸ Α σημεῖον,> πλευραὶ δὲ ἔστωσαν
 τοῦ κώνου αἱ ΑΕ, ΑΖ, καὶ ἦχθω τις τῇ ΕΖ παράλληλος
 ἡ ΚΛ καὶ συμβαλλέτω τῇ μὲν περιφερείᾳ τοῦ τμήματος
 κατὰ τὰ Κ, Λ, ταῖς δὲ τοῦ ΑΕΖ κώνου πλευραῖς κατὰ τὰ
 10 Ρ, Ο, τῇ δὲ ΑΓ κατὰ τὸ Π. Ἐπεὶ δὴ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς
 ΑΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ, καὶ ἐστὶ τῷ μὲν
 ἀπὸ ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΠ, ΠΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΠ τὸ
 ἀπὸ ΠΟ, ἐπεὶ καὶ τῷ ἀπὸ ΑΗ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἐστὶν ἴσον,
 ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΠ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΚΠ, ΠΟ πρὸς τὸ
 15 ἀπὸ ΟΠ. Ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΚΠ, ΠΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, οὕτως
 ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον
 τὴν ΟΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ,
 καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΠ, οὕτως
 ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ
 20 κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὴν ΟΡ. Ἐπεὶ οὖν ὡς οἱ περὶ
 διαμέτρους τὰς ΚΛ, ΟΡ κύκλοι πρὸς τὸν περὶ διάμετρον
 τὴν ΟΡ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΠΑ, μετακείσθω ὁ περὶ διάμετρον
 τὴν ΟΡ κύκλος καὶ κείσθω τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε
 κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ
 25 πρὸς ΑΠ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ καὶ
 ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ αὐτοῦ μένοντες πρὸς τὸν κύκλον
 τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ μετενεχθέντα καὶ τεθέντα τοῦ
 ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους
 τὸ Θ ἰσόρροποι ἄρα οἱ κύκλοι ὃ τε ἐν τῷ τμήματι τῷ
 30 ΒΑΔ καὶ ὁ ἐν τῷ ΑΕΖ <κῶνι τῷ ἐν τῷ ΑΕΖ κῶνι περὶ>

AEZ. De la même manière tous les cercles dans le segment $B\Delta$ et dans le cône AEZ, restant en place, feront équilibre autour du point A à tous les cercles dans le cône AEZ, déplacés et posés sur le levier au point Θ de manière que Θ soit leur centre de gravité ; il s'ensuit que la somme du segment de sphère $AB\Delta$ et du cône AEZ, ces figures restant en place, fera à son tour équilibre autour du point A au cône EAZ, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière que Θ soit son centre de gravité. Soit un cylindre MN, équivalent au cône ayant pour base le cercle de diamètre EZ et pour sommet le point A, et un point Φ divisant AH de manière que AH soit quadruple de ΦH ; le point Φ est, dès lors, le centre de gravité du cône EAZ, comme nous l'avons signalé plus haut¹. Coupons, de plus, le cylindre MN par un plan perpendiculaire de manière que le cylindre M fasse équilibre au cône EAZ. Du moment donc que le cône EAZ et le segment $AB\Delta$, restant en place, font équilibre au cône EAZ, déplacé et posé sur le levier au point Θ de manière que Θ soit son centre de gravité, que le cylindre MN est équivalent au cône EAZ, que chacun des deux cylindres M et N est posé au point Θ , et que le cylindre MN fait équilibre au segment et au cône, le cylindre N fera à son tour équilibre autour du point A au segment de sphère. D'autre part, le rapport du segment de sphère $B\Delta$ au cône ayant pour base le cercle de diamètre $B\Delta$ et pour sommet le point A est égal au rapport de EH à $H\Gamma$, comme nous l'avons démontré plus haut². Mais le rapport du cône $B\Delta$ au cône EAZ est égal³ au rapport du cercle de diamètre $B\Delta$ au cercle de diamètre EZ, et le rapport du cercle au cercle est égal au rapport du carré sur BH au carré sur HE ; de plus,

1. Cf. lemme 10.

2. Cf. prop. 7.

3. Cf. Eucl. XII, 11.

- τὸ Α. Ὅμοίως δὲ καὶ πάντες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ ΒΑΔ
 τμήματι καὶ ἐν τῷ ΑΕΖ κώνῳ αὐτοῦ μένοντες κατὰ τὸ
 Α σημείον ἰσορροποὶ πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν τῷ ΑΕΖ
 κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθείσι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ,
 5 ὥστε κέντρον εἶναι αὐτῶν τοῦ βάρους τὸ Θ · ὥστε καὶ τὸ
 ΑΒΔ τμήμα τῆς σφαίρας καὶ ὁ ΑΕΖ κώνος ἰσορροπεῖ
 περὶ τὸ Α σημείον αὐτοῦ μένοντα τῷ ΕΑΖ κώνῳ μετενεχ-
 θέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον
 εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. Ἐστω δὲ τῷ κώνῳ τῷ
 10 βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλον,
 κορυφὴν δὲ τὸ Α σημείον, ἴσος κύλινδρος ὁ ΜΝ, καὶ
 τετμήσθω ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Φ, ὥστε τετραπλασίαν εἶναι
 τὴν ΑΗ τῆς ΦΗ · τὸ Φ ἄρα σημείον κέντρον ἐστὶ τοῦ
 βάρους τοῦ ΕΑΖ κώνου · τοῦτο γὰρ προγράφεται. Καὶ
 15 τετμήσθω ἔτι ὁ ΜΝ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέμνοντι πρὸς
 ὀρθάς, (ὥστε τὸν Μ κύλινδρον ἰσορροπεῖν τῷ ΕΑΖ
 κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπὸς ὁ ΕΑΖ κώνος καὶ τὸ ΑΒΔ
 τμήμα αὐτοῦ μένοντα τῷ ΕΑΖ κώνῳ μετενεχθέντι καὶ
 τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ
 20 τοῦ βάρους τὸ Θ, καὶ ἐστὶν τῷ ΕΑΖ κώνῳ ἴσος ὁ ΜΝ
 κύλινδρος, καὶ κεῖται ἐκάτερος τῶν Μ, Ν κυλίνδρων κατὰ
 τὸ Θ, καὶ ἰσορροπὸς ὁ ΜΝ κύλινδρος ἐκατέροις, ἰσορροπὸς
 καὶ ὁ Ν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Α σημείον.
 Καὶ [ἐπεὶ] ἐστὶν ὡς τὸ ΒΑΔ τμήμα τῆς σφαίρας πρὸς
 25 τὸν κώνον, οὕτως ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος,
 κορυφὴ δὲ τὸ Α σημείον, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΗΓ · τοῦτο
 γὰρ προγράφεται. Ὡς δὲ ὁ ΒΑΔ κώνος πρὸς τὸν ΕΑΖ
 κώνον, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ πρὸς
 τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ὁ κύκλος
 30 πρὸς τὸν κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ,

14 προγράφεται : προσγράφεται || 20 τῷ : τὸ || 21 τῶν Μ, Ν
 κυλίνδρων : τῷ ΜΝ κυλίνδρῳ || 24 [ἐπεὶ] del. Heiberg || 27 προ-
 γράφεται : προσγράφεται || ΕΑΖ : ΕΖ.

le carré sur BH est équivalent au rectangle de côtés ΓH et HA, le carré sur HE est équivalent au carré sur HA, et le rapport du rectangle de côtés ΓH et HA au carré sur HA est égal au rapport de ΓH à HA ; il s'ensuit que le cône B $\Delta\Delta$ est au cône EAZ comme ΓH est à HA. Mais on a montré aussi que le cône B $\Delta\Delta$ est au segment B $\Delta\Delta$ comme ΓH est à H Ξ ; par identité¹ donc, le segment B $\Delta\Delta$ est au cône EAZ comme ΞH est à HA. Et comme le rapport de AX à XH est égal au rapport de la somme de HA et du quadruple de H Γ à la somme de AH et du double de H Γ , par inversion², le rapport de HX à XA sera égal au rapport de la somme du double de ΓH et de HA à la somme du quadruple de ΓH et de HA. Par composition³, le rapport de HA à AX sera égal au rapport de la somme du sextuple de ΓH et du double de HA à la somme de HA et du quadruple de H Γ . De plus, H Ξ est égal au quart de la somme du sextuple de H Γ et du double de HA, et $\Gamma\Phi$ est égal au quart de la somme du quadruple de H Γ et de HA, comme cela est évident⁴ ; HA est donc à AX comme⁵ ΞH est à $\Gamma\Phi$, d'où il suit que ΞH est à HA comme⁶ $\Gamma\Phi$ est à XA. Mais on a montré aussi que le rapport de ΞH à HA est égal au rapport du segment, ayant pour sommet le point A et pour base le cercle de diamètre B Δ , au cône ayant pour sommet le point A et pour base le cercle de diamètre EZ ; il s'ensuit que le segment B $\Delta\Delta$ est au cône EAZ comme $\Gamma\Phi$ est à XA. Et comme le cylindre M fait équilibre au cône EAZ autour du point A, et que le centre de gravité du cylindre est le point Θ et celui du cône EAZ le point Φ , le cône EAZ sera au cylindre M comme ΘA est à A Φ , c'est-à-dire comme ΓA est à A Φ . De plus, le cône EAZ est équivalent au cylindre MN ; par décomposition⁷ donc, le cylindre MN est au cylindre N comme A Γ est à $\Gamma\Phi$. En outre, le cylindre MN est équivalent au cône EAZ ;

1. Cf. Eucl. V, 22.

2. Cf. Eucl. V, 7, coroll.

3-7. Cf. notes complémentaires.

- καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ ΒΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΑ, τῷ δὲ ἀπὸ
 ΗΕ ἴσον τὸ ἀπὸ ΗΑ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ
 ΗΑ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΑ · ὡς ἄρα ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς
 τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΑ. Ἐδείχθη δὲ καί
 5 ὡς ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς τὸ ΒΑΔ τμήμα, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς
 ΗΞ · δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ΒΑΔ τμήμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον,
 οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ. Καί ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΧ πρὸς ΧΗ,
 οὕτως ἡ ΗΑ καὶ ἡ τετραπλασία τῆς ΗΓ πρὸς τὴν ΑΗ καὶ
 τὴν διπλασίαν τῆς ΗΓ, ἀνάπαλιν ἔσται ὡς ἡ ΗΧ πρὸς
 10 ΧΑ, οὕτως ἡ διπλασία τῆς ΓΗ καὶ ἡ ΗΑ πρὸς τὴν τετραπλὴν
 τῆς ΓΗ καὶ τὴν ΗΑ. Συνθέντι ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΧ, οὕτως
 ἡ ἑξαπλασία τῆς ΓΗ καὶ διπλασία τῆς ΗΑ πρὸς τὴν ΗΑ
 καὶ τετραπλὴν τῆς ΗΓ. Καὶ τῆς μὲν ἑξαπλασίας τῆς
 ΗΓ καὶ διπλασίας τῆς ΗΑ ἡ ΗΞ, τῆς δὲ τετραπλασίας
 15 τῆς ΗΓ καὶ τῆς ΗΑ τέταρτον μέρος ἡ ΓΦ · τοῦτο γὰρ
 φανερόν · ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς ΑΧ, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΓΦ ·
 ὥστε καὶ ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ. Ἐδείχθη
 δὲ καὶ ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως τὸ τμήμα, οὐ ἐστὶ κορυφή
 τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος,
 20 πρὸς τὸν κῶνον, οὐ ἐστὶ κορυφή τὸ Α σημεῖον, βάσις
 δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλος · ὡς ἄρα τὸ ΒΑΔ τμήμα
 πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ. Καί ἐπεὶ
 ἰσόρροπος ὁ Μ κύλινδρος τῷ ΕΑΖ κῶνι κατὰ τὸ Α, καί
 ἐστὶ τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ Θ, τοῦ δὲ ΕΑΖ
 25 κῶνου τὸ Φ, ἔσται ἄρα ὡς ὁ ΕΑΖ κῶνος πρὸς τὸν Μ
 κύλινδρον, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΦ, τουτέστιν ἡ ΓΑ πρὸς
 ΑΦ. Καί ἐστι τῷ ΕΑΖ κῶνι ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος · διελόντι
 ἄρα ὡς ὁ ΜΝ κύλινδρος πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ
 ΑΓ πρὸς ΓΦ. Καί ἐστὶν ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος τῷ ΕΑΖ

5 τὸ : : om. || 11 ΗΑ : ἑξαπλῇ τῆς ΗΑ || 12 ἑξαπλασία :
 ἑξαπλασίαν || διπλασία : διπλασίαν || τῆς alt. τὴν || 13 τῆς pr. : τὴν
 || 27-28 διελόντι ἄρα ὡς ὁ ΜΝ κύλινδρος suppl. Heiberg.

le cône EAZ est donc au cylindre N comme ΓA est à $\Gamma \Phi$, c'est-à-dire comme ΘA est à $\Gamma \Phi$. Mais on a aussi démontré que le segment $BA\Delta$ est au cône EAZ comme $\Gamma \Phi$ est à XA ; par identité¹ donc, le segment $ABA\Delta$ sera au cylindre N comme ΘA est à AX . Mais on a démontré que le segment $BA\Delta$ fait équilibre au cylindre N au point A, et, de plus, le centre de gravité du cylindre N est le point Θ ; par conséquent, le centre de gravité du segment $BA\Delta$ est le point X.

10.

Mêmes raisonnements pour démontrer la proposition suivante : Dans tout segment d'ellipsoïde, le centre de gravité est situé sur l'axe du segment, au point qui divise l'axe de manière que le rapport de la partie située du côté du sommet du segment à la partie restante soit égal au rapport de la somme de l'axe du segment et du quadruple de l'axe du segment opposé à la somme de l'axe du segment et du double de l'axe du segment opposé.

11.

La méthode s'applique aussi à la proposition que voici : Le rapport de tout segment d'hyperboloïde de révolution au cône ayant la même base et le même axe que le segment est égal au rapport de la somme de l'axe du segment et du triple de la droite ajoutée à l'axe² à la somme de l'axe du segment d'hyperboloïde et du double de la droite ajoutée à l'axe, et le centre de gravité du segment d'hyperboloïde est situé en un point qui divise l'axe de manière que le rapport de la

1. Cf. Eucl. V, 22.

2. Sur cette expression cf. *Sur les con. et les sphér.*, 25.

κῶνω · ὡς ἄρα ὁ ΕΑΖ κῶνος πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΓΦ, τουτέστιν ἡ ΘΑ πρὸς ΓΦ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΑΔ τμήμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ · δι' ἴσου ἄρα ἔσται ὡς τὸ ΑΒΔ τμήμα πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΧ. Καὶ ἐδείχθη ἰσορροπον τὸ ΒΑΔ τμήμα τῷ Ν κυλίνδρῳ κατὰ τὸ Α, καὶ ἔστι τοῦ Ν κυλίνδρου κέντρον βάρους τὸ Θ · καὶ τοῦ ΒΑΔ ἄρα τμήματος κέντρον τὸ Χ σημεῖον. [τὸ σχῆμα].

ι'.

- 10 Ὅμοιως δὲ τούτοις θεωρεῖται καὶ ὅτι παντὸς τμήματος σφαιροειδέος τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣ ἐστὶν ἄξων τοῦ τμήματος, διηρημένης τῆς εὐθείας, ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμ-
15 φότερον ὃ τε ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ τετραπλασία τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι πρὸς συναμ- φότερον τὸν τε ἄξονα τοῦ τμήματος καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ τμήματι ἐμπεριεχομένου.

ια'.

- 20 Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου <καὶ ὅτι πᾶν τμήμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος> πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ὃ τε ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ τριπλασία τῆς προσοῦσης τῷ ἄξονι
25 πρὸς συναμφότερον τὸν τε ἄξονα τοῦ τμήματος τοῦ κωνοειδέος καὶ τὴν διπλασίαν τῆς προσοῦσης τῷ ἄξονι, κέντρον δὲ τοῦ βάρους τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος

partie voisine du sommet à la partie restante soit égal au rapport entre la somme du triple de l'axe et de l'octuple de la droite ajoutée et la somme de l'axe de l'hyperboloïde et du quadruple de la droite ajoutée à l'axe. Bien que plusieurs autres théorèmes¹ puissent être démontrés par cette méthode, nous renonçons à les citer ici, parce que les théorèmes indiqués suffisent pour illustrer l'emploi de notre méthode.

12.

Si on inscrit dans un prisme droit, ayant pour bases des carrés, un cylindre ayant ses bases situées dans les carrés opposés et sa surface tangente aux quatre plans restants (sc. du prisme), et si on fait passer un plan par le centre de l'un des cercles de base du cylindre et par un des côtés du carré opposé, la figure découpée par le plan mené est la sixième partie du prisme entier. Cette proposition se démontre par cette méthode. Après l'avoir fait voir², nous retournerons à sa démonstration par la géométrie.

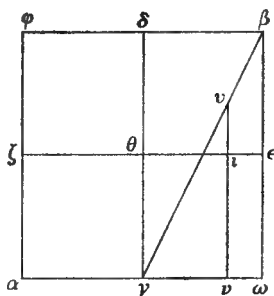


Fig. 129

1. Malgré une lacune de quelques mots dans le texte grec, le sens de cette conclusion de la prop. 11 est clair.

2. Cf. prop. 14 et 15.

τμηθέντος τοῦ ἄξονος, ὥστε) τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμήμα
 πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ὁ τε τριπλάσιος τοῦ
 ἄξονος (καὶ ἡ ὀκταπλασία) τῆς προσκειμένης πρὸς τὸν
 ἄξονα αὐτοῦ τοῦ κωνοειδέος καὶ τὴν τετραπλασίαν αὐτῆς
 5 τῆς προσκειμένης πρὸς αὐτόν· καὶ ἄλλων πλείονων ἂ
 θεωρουμένων τὰ περιλήψομεν ῥη
 τως, ἐπεὶ ὁ τρόπος ὑποδέδεικται διὰ τῶν προειρημένων.

ιβ'.

Ἐὰν εἰς πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις κύλιν-
 10 δρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν τοῖς ἀπεναντίον
 τετραγώνοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν λοιπῶν [παραλλη-
 λογράμμων] τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, διὰ δὲ
 τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βᾶσις τοῦ κυλίνδρου,
 καὶ μιᾶς πλευ(ρᾶς τοῦ ἀπεναντίον τετραγώνου ἐπίπε)δον
 15 ἀχθῇ, ὅτι τὸ ἀποτμηθὲν σχῆμα ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου
 (ἕκτον) ἐστὶ μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος, διὰ τοῦ τρόπου
 τούτου θεωρεῖται. Δείξαντες δὲ ἀναχωρήσομεν ἐπὶ τὴν
 διὰ τῶν γεωμετρούμενων ἀπόδειξιν αὐτοῦ.

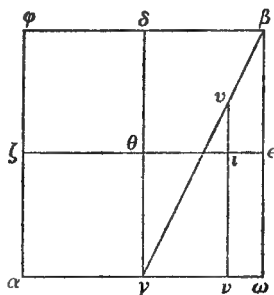


Fig. 129

2 τὸ : τὸν || 5 προσκειμένης : προκειμένης || 8 ιβ' : om. || 9
 ἔχον : ἔχοντι || 11-12 [παραλληλογράμμων] del. Heibger || 12
 ἐφαπτομένην : ἐφαπτόμενον || 13 ὅς : ὁ || 16 <ἕκτον> suppl.
 Heiberg.

Imaginons un prisme ayant pour bases des carrés, et un cylindre inscrit dans le prisme de la manière indiquée ; le prisme étant coupé par un plan passant par l'axe et perpendiculaire au plan découpant le segment du cylindre, soit le parallélogramme AB l'intersection de ce plan avec le prisme contenant le cylindre, la droite $B\Gamma$ l'intersection du plan découpant le segment du cylindre avec le plan mené par l'axe et perpendiculaire au plan découpant le segment du cylindre ; soit $\Gamma\Delta$ l'axe du prisme et du cylindre et EZ une droite coupant l'axe à angle droit en son milieu ; faisons passer par EZ le plan perpendiculaire à $\Gamma\Delta$, qui coupera le prisme suivant un carré et le cylindre suivant un cercle. Soit le carré MN l'intersection avec le prisme, et le cercle $\Xi O\Pi P$ l'intersection avec le cylindre, et Ξ, O, Π, P les points de contact de ce cercle avec les côtés du carré ; soit $K\Lambda$ l'intersection du plan découpant le segment du cylindre avec le plan mené par EZ et perpendiculaire à l'axe du cylindre ; $K\Lambda$ est divisé en deux parties égales par la droite $\Pi\Theta\Xi$. Menons dans le demi-cercle $O\Pi P$ la droite ΣT perpendiculaire à ΠX , faisons passer par ΣT le plan perpendiculaire à $\Xi\Pi$, et prolongeons ce plan de part et d'autre du plan contenant le cercle $\Xi O\Pi P$; l'intersection de ce plan avec le demi-cylindre ayant pour base le demi-cercle $O\Pi P$ et pour hauteur l'axe du prisme sera le parallélogramme, dont un des côtés est égal à ΣT et dont l'autre côté est égal à la génératrice du cylindre, et son intersection avec le segment découpé du cylindre sera un autre parallélogramme,

- Νοείσθω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις καὶ
 ἐν τῷ πρίσματι κύλινδρος ἐγγεγραμμένος ὡς εἴρηται,
 τμηθέντος δὲ τοῦ πρίσματος διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ
 ὀρθῷ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ τμήμα τοῦ
 5 κυλίνδρου τοῦ μὲν πρίσματος τοῦ τὸν κύλινδρον ἔχοντος
 τομὴ ἔστω τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ἐπιπέδου
 τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμήμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ
 τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἡγμένου ἐπιπέδου ὀρθοῦ πρὸς τὸ
 ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμήμα
 10 κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΒΓ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ πρίσματος
 καὶ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΓΔ εὐθεῖα, καὶ τεμνέτω αὐτὴν ἡ
 ΕΖ δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς, καὶ διὰ τῆς ΕΖ ἐπίπεδον ἀνεστάτω
 ὀρθὸν πρὸς τὴν ΓΔ · ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν τῷ πρίσματι
 τομὴν τετράγωνον, ἐν δὲ τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον.
 15 Ἔστω οὖν τοῦ μὲν πρίσματος τομὴ τὸ ΜΝ τετράγωνον,
 τοῦ δὲ κυλίνδρου ὁ ΞΟΡΡ <κύκλος, καὶ ἐφαπτέσθω ὁ
 κύκλος> τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν κατὰ τὰ Ξ, Ο, Π, Ρ
 σημεία, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμήμα
 ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ διὰ τῆς ΕΖ ἀχθέντος ἐπιπέδου
 20 ὀρθοῦ πρὸς τὸν ἄξωνα τοῦ κυλίνδρου κοινὴ τομὴ ἔστω
 ἡ ΚΛ εὐθεῖα · τέμνει δὲ αὐτὴν δίχα ἡ ΠΘΞ. Ἦχθω δέ τις
 εὐθεῖα ἐν τῷ ΟΡΡ ἡμικυκλίῳ ἡ ΣΤ πρὸς ὀρθάς οὔσα τῇ
 ΠΧ, καὶ ἀπὸ τῆς ΣΤ ἐπίπεδον ἀνασταθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν
 ΞΠ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἐκάτερα τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ ἐστὶν
 25 ὁ ΞΟΡΡ κύκλος · ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν τῷ ἡμικυλίνδρῳ,
 οὗ ἐστὶ βάσις τὸ ΟΡΡ ἡμικύκλιον, ὕψος δὲ ὁ ἄξων τοῦ
 πρίσματος, τομὴν παραλληλόγραμμον, οὗ ἔσται μία
 μὲν πλευρὰ ἡ ἴση τῇ ΣΤ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ τοῦ κυλίνδρου
 πλευρᾷ, ποιήσει δὲ καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτετμημένῳ
 30 ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τομὴν παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστὶν

1 καὶ : om. || 6 τὸ : om. || 24 τοῦ ἐπιπέδου : τὸ ἐπίπεδον ||
 25 ὁ : ἡ.

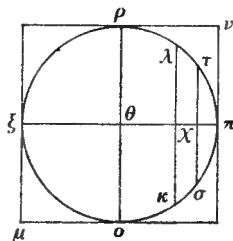


Fig. 130

dont l'un des côtés est égal à ΣT , l'autre à NY ; que NY soit mené dans le parallélogramme ΔE parallèlement à $B\Omega$, de manière que NY découpe EI égal à ΠX . Puisque $E\Gamma$ est un parallélogramme, que NI est parallèle à $\Theta\Gamma$, et que $E\Theta$ et ΓB sont menés au travers de ces droites, $E\Theta$ est à ΘI comme $\Omega\Gamma$ est à ΓN , c'est-à-dire comme¹ $B\Omega$ est à YN . Mais le rapport de $B\Omega$ à YN est égal au rapport du parallélogramme déterminé dans le demi-cylindre au parallélogramme déterminé dans le segment découpé du cylindre², puisque les deux parallélogrammes ont en commun le côté ΣT ; de plus, $E\Theta$ est égal à $\Theta\Pi$, et IO est égal à $X\Theta$; comme $\Pi\Theta$ est égal à ΘE , le rapport de ΘE à ΘX est égal au rapport du parallélogramme déterminé dans le demi-cylindre au parallélogramme déterminé dans le segment découpé du cylindre.

Imaginons que le parallélogramme dans le segment soit déplacé et posé sur le point E de manière que E soit son centre de gravité, et imaginons que ΠE soit un levier de centre Θ ; dès lors, le parallélogramme dans le demi-cylindre, restant en place, fait équilibre autour du point Θ au parallélogramme déterminé dans

1. Cf. Eucl. VI, 4.

2. Cf. Eucl. VI, 1.

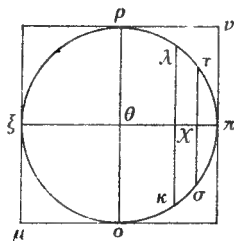


Fig. 130

- ἡ μὲν ἑτέρα πλευρὰ ἴση τῇ ΣΤ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ ΝΥ · ἔστω
 δὲ οὕτως ἡ ΝΥ ἡγμένη ἐν τῷ ΔΕ παραλληλογράμῳ
 παράλληλος οὖσα τῇ ΒΩ ἴσην ἀπολαμβάνουσα τὴν ΕΙ
 τῇ ΠΧ. Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΓ, καὶ
 5 παράλληλος ἡ ΝΙ τῇ ΘΓ, καὶ διηγμένοι εἰσὶν αἱ ΕΘ, ΓΒ,
 ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΙ, οὕτως ἡ ΩΓ πρὸς ΓΝ, τουτέστιν
 ἡ ΒΩ πρὸς ΥΝ. Ὡς δὲ ἡ ΒΩ πρὸς ΥΝ, οὕτως τὸ παραλλη-
 λόγραμμον τὸ γενόμενον <ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ πρὸς τὸ
 γε>νόμενον ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ
 10 κυλίνδρου · ἀμφοτέρων γὰρ τῶν παραλληλογράμμων
 ἡ αὐτὴ πλευρὰ ἐστὶν ἡ ΣΤ · καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΠ,
 ἡ δὲ ΙΘ τῇ ΧΘ · καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΠΘ τῇ ΘΞ, ὡς ἄρα
 ἡ ΘΞ πρὸς ΘΧ, οὕτως τὸ γενόμενον παραλληλόγραμμον
 ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ πρὸς τὸ γενόμενον ἐν τῷ ἀποτμήματι
 15 τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου.

- Νοεῖσθω μετακείμενον τὸ ἐν τῷ τμήματι παραλληλό-
 γραμμον καὶ κείμενον κατὰ τὸ Ξ, ὥστε κέντρον εἶναι
 αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ, καὶ ἔτι νοεῖσθω ζυγὸς ἡ ΠΞ,
 μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Θ · ἰσορροπεῖ δὴ περὶ τὸ Θ σημεῖον
 20 τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ αὐτοῦ
 μένον τῷ παραλληλογράμῳ τῷ γενομένῳ ἐν τῷ ἀπο-

1 ΣΤ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ suppl. Heiberg || 5 ΓΒ : ΘΒ || 6 οὕτως :
 οὕτως ὡς || 7-8 παραλληλόγραμμον : παράλληλον || 14 τῷ alt. : om.
 || 16 τὸ : τῷ || 18 ἔτι : ἐστι || 21 τῷ tert. om.

le segment découpé du cylindre, déplacé et posé sur le levier au point Ξ de manière que Ξ soit son centre de gravité. Comme le centre de gravité du parallélogramme, déterminé dans le demi-cylindre¹, est le point X , et celui du parallélogramme, déterminé dans le segment découpé, et déplacé, le point Ξ , et que le rapport de $\Xi\Theta$ à ΘX est égal au rapport du parallélogramme, que nous avons dit avoir pour centre de gravité le point X au parallélogramme, que nous avons dit avoir pour centre de gravité le point Ξ , le parallélogramme de centre de gravité X fera équilibre autour du point Θ au parallélogramme de centre de gravité Ξ . On démontrera de la même manière que, si dans le demi-cercle $O\Pi P$ on mène une autre droite perpendiculaire à $\Pi\Theta$, si on fait passer par la droite menée le plan perpendiculaire à $\Pi\Theta$ et qu'on prolonge ce plan de part et d'autre du plan contenant le cercle $\Xi O\Pi P$, le parallélogramme déterminé dans le demi-cylindre, restant en place, fera équilibre au parallélogramme déterminé dans le segment découpé du cylindre, déplacé et posé sur le levier au point Ξ de manière que Ξ soit son centre de gravité. Il s'ensuit que tous les parallélogrammes déterminés dans le demi-cylindre, restant en place, feront équilibre autour du point Θ à tous les parallélogrammes déterminés dans le segment découpé du cylindre, déplacés et posés sur le levier au point Ξ ; par conséquent, le demi-cylindre lui-même, restant en place, fera équilibre autour du point Θ au segment

1. Cf. lemme 6.

- τμήματι τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ σημεῖον. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶ τοῦ μὲν παραλληλογράμμου τοῦ γενομένου ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ κέντρον
- 5 τοῦ βάρους τὸ X , τοῦ δὲ παραλληλογράμμου τοῦ γενομένου ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ξ , καὶ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἢ $\Xi\Theta$ πρὸς ΘX , ὃν τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ εἵπομεν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ X , πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον,
- 10 οὗ εἵπομεν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ Ξ , ἰσορροπήσει ἄρα περὶ τὸ Θ τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ κέντρον τοῦ βάρους τὸ X , τῷ παραλληλογράμμῳ, οὗ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ξ . Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ὅταν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῷ $ΟΠΡ$ ἡμικυκλίῳ πρὸς ὀρθὰς τῇ $ΠΘ$, καὶ
- 15 ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπιπέδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν $ΠΘ$ καὶ ἐκβληθῇ ἐφ' ἐκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐν ϕ ἐστὶν ὁ $\Xi ΟΠΡ$ κύκλος, [ὅτι] τὸ γινόμενον παραλληλόγραμμον ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ ἰσορροπὸν περὶ τὸ Θ σημεῖον αὐτοῦ μένον τῷ παραλληλογράμμῳ τῷ γενομένῳ
- 20 ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ σημεῖον. Καὶ πάντα ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ γενόμενα ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ αὐτοῦ μένοντα ἰσορροπήσει περὶ τὸ Θ
- 25 σημεῖον πᾶσι τοῖς παραλληλογράμμοις τοῖς γενομένοις ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενηνεγμένοις καὶ κειμένοις τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον· ὥστε ἰσορροπεῖν καὶ τὸ ἡμικυλίνδριον αὐτοῦ μένον περὶ τὸ Θ σημεῖον τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι

2 ὥστε : ἔσται || 2-3 αὐτοῦ τοῦ : τοῦ αὐτοῦ || 8 εἵπομεν : εἴπωμεν || 10 ἰσορροπήσει — 13 τὸ Ξ suppl. Heiberg || 17 [ὅτι] del. Heiberg || 27 καὶ : om. || 28 ὥστε : om.

découpé, déplacé et posé sur le levier au point Ξ de manière que Ξ soit son centre de gravité.

13.

Soit de nouveau le parallélogramme MN perpendiculaire à l'axe, et le cercle $\Xi O \Pi P$; menons les droites ΘM et ΘH , faisons passer par elles les plans perpendiculaires au plan contenant le demi-cercle $O \Pi P$, et prolongeons les plans indiqués dans les deux sens ;

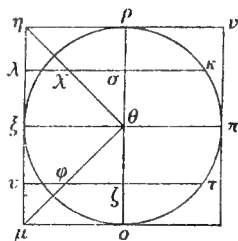


Fig. 131

il y aura dès lors un prisme ayant une base telle que le triangle $\Theta M H$ et une hauteur égale à l'axe du cylindre, et ce prisme est la quatrième partie du prisme entier qui contient le cylindre¹. Menons dans le demi-cercle $O \Pi P$ et dans le carré MN des droites $K \Lambda$ et $T \Upsilon$, équidistantes de $\Pi \Xi$, qui coupent la circonférence du demi-cercle $O \Pi P$ aux points K et T , le diamètre OP aux points Σ et Z , et les droites ΘH et ΘM aux points Φ et X ; faisons passer par $K \Lambda$ et $T \Upsilon$ les plans perpendiculaires à OP et prolongeons ces plans de part et d'autre du plan contenant le cercle $\Xi O \Pi P$; dès lors,

1. Cf. Eucl. XI, 32.

l'un de ces plans déterminera, dans le demi-cylindre ayant pour base le demi-cercle $O\Pi P$ et pour hauteur celle du cylindre, comme intersection un parallélogramme dont l'un des côtés est égal à $K\Sigma$ et l'autre égal à l'axe du cylindre, et, de la même manière, dans le prisme ΘHM , un parallélogramme ayant l'un de ses côtés égal à ΛX et l'autre égal à l'axe ; pour les mêmes raisons, le même demi-cylindre sera coupé suivant un (sc. autre) parallélogramme ayant l'un de ses côtés égal à TZ et l'autre égal à l'axe du cylindre, et le prisme sera coupé suivant un parallélogramme ayant l'un de ses côtés égal à $\Upsilon\Phi$ et l'autre égal à l'axe du cylindre¹.

14.

Soit un prisme droit ayant pour bases des carrés ; qu'une de ses bases soit le carré $AB\Gamma\Delta$; inscrivons dans le prisme un cylindre ayant pour base le cercle $EZH\Theta$, tangent aux côtés du carré $AB\Gamma\Delta$ aux points

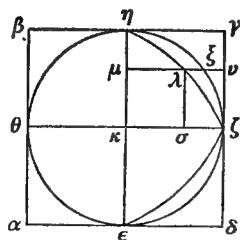


Fig. 132

E, Z, H, Θ , et faisons passer un plan par le centre de ce cercle et par le côté correspondant à $\Gamma\Delta$ dans le

1. Cf. notes complémentaires.

- τὸ ἕτερον ἐν> μὲν τῷ ἡμικυλινδρίῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν τὸ ΟΠΡ ἡμικύκλιον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τομὴν παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστὶν μία μὲν πλευρὰ ἴση τῇ ΚΣ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, ἐν δὲ τῷ
- 5 πρίσματι τῷ ΘΗΜ ὁμοίως παραλληλόγραμμον, οὗ ἔσται μία μὲν ἴση τῇ ΛΧ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι· διὰ δὲ τὰ αὐτὰ ἐν τῷ αὐτῷ ἡμικυλινδρίῳ ἔσται τι παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστὶ μία μὲν πλευρὰ ἴση τῇ ΤΖ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι <τοῦ κυλίνδρου, ἐν δὲ τῷ πρίσματι παραλλη-
- 10 λόγραμμον, οὗ ἐστὶν ἡ μὲν μία> πλευρὰ ἴση τῇ ΥΦ, ἡ δὲ ἑτέρα ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου

ιδ'.

- Ἐστω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις, καὶ ἔστω αὐτοῦ μία τῶν βάσεων τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, καὶ
- 15 ἐγγεγράψθω εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος, καὶ ἔστω τοῦ κυλίνδρου βάσις ὁ ΕΖΗΘ κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τοῦ

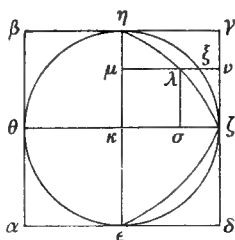


Fig. 132

ΑΒΓΔ πλευρῶν κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς τῆς ἐν τῷ κατε-

6 δὲ alt. : om. || 7 ἐν : τῷ ἐν || 12 ιδ' : om. || 16-18 τῶν τοῦ ΑΒΓΔ πλευρῶν κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ suppl. Heiberg || 18 ἐν τῷ : εἰ (hoc est E).

carré situé dans le plan opposé à celui du plan de $AB\Gamma\Delta$; ce plan découpera du prisme entier un autre prisme, qui sera la quatrième partie du prisme entier, et qui sera limité par trois parallélogrammes et par deux triangles situés l'un en face de l'autre. Décrivons dès lors dans le demi-cercle EZH une parabole ; soit ZK la partie de son diamètre située dans le segment de parabole ; menons dans le parallélogramme ΔH la droite MN parallèle à KZ ; elle coupera la circonférence du demi-cercle en Ξ et la parabole en Λ . Il est manifeste¹ que le rectangle de côtés MN et NA est équivalent au carré sur NZ ; dans ces conditions², MN sera à NA comme³ le carré sur KH est au carré sur $\Lambda\Sigma$. Faisons passer par MN le plan perpendiculaire à EH ; ce plan coupera le prisme découpé du prisme entier suivant un triangle rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit sera MN , dont l'autre côté, perpendiculaire, dans le plan passant par $\Gamma\Delta$, à la droite $\Gamma\Delta$ au point N , est égal à l'axe du cylindre, et dont l'hypoténuse est située dans le plan sécant même ; mais ce plan coupera aussi le segment découpé du cylindre par le plan mené par EH et par le côté du carré, opposé à $\Gamma\Delta$, suivant un triangle rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit est $M\Xi$, dont l'autre côté est situé dans la surface du cylindre et perpendiculaire au plan KN en Ξ , et dont l'hypoténuse est située dans le plan sécant. Pour les mêmes raisons donc, puisqu'il est évident⁴ que le rectangle de côtés MN et MA est équivalent au carré sur $M\Xi$, MN sera à MA comme le carré sur MN est au carré sur $M\Xi$. Mais le rapport du carré sur MN au carré

1. Cf. Apollonius I, 11.

2. Cf. Eucl. V, déf. 9 ; VI, 17.

3. Cf. *Quadr. parab.*, 3.

4. Puisque $\overline{M\Xi}^2 = MH \cdot ME = \overline{HK}^2 - \overline{MK}^2 = \overline{MN}^2 - MN \cdot NA = MN (MN - NA)$; cf. Eucl. II, 5 ; III, 31 ; VI, 8, coroll. ; VI, 17.

- ναντίον ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΒΓΔ τῆς κατὰ τὴν ΓΔ ἐπίπεδον ἤχθω · ἀποτεμεῖ δὴ τοῦτο ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος ἄλλο πρίσμα, ὃ ἔσται τέταρτον μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος, αὐτὸ δὲ τοῦτο ἔσται περιεχόμενον ὑπὸ τριῶν παραλλη-
- 5 λογράμμων καὶ δύο τριγώνων κατεναντίον ἀλλήλοις. Γεγράφθω δὴ ἐν τῷ ΕΖΗ ἡμικυκλίῳ ὀρθογωνίου κώνου τομή, ἔστω <δὲ>..... ἐν τῇ τομῇ.. τῆς ἢ ΖΚ, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ ἢ ΜΝ παράλληλος οὔσα τῇ ΚΖ · τεμεῖ δὴ αὕτη τὴν μὲν τοῦ
- 10 ἡμικυκλίου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ξ, τὴν δὲ τοῦ κώνου τομὴν κατὰ τὸ Λ. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΜΝΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΖ · τοῦτο γὰρ ἔστι σαφές · διὰ τοῦτο δὴ ἔσται ὡς ἡ ΜΝ πρὸς ΝΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΣ. Καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΕΗ ·
- 15 ποιήσει δὴ τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ πρίσματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος τομὴν τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἔσται μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἢ ΜΝ, ἡ δὲ ἑτέρα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ ὀρθὴ πρὸς τὴν ΓΔ ἀναγομένη ἀπὸ τοῦ Ν ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ ὑποτείνουσα
- 20 ἐν αὐτῷ τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ · ποιήσει δὲ καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀχθέντος διὰ τῆς ΕΗ καὶ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς τῆς κατεναντίον τῇ ΓΔ τομὴν τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἔσται μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἢ ΜΞ, ἡ δὲ
- 25 ἑτέρα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου <ἀν>ηγμένη <ἀπὸ τοῦ Ξ> ὀρθὴ πρὸς τὸ ΚΝ ἐπίπεδον, <ἡ δὲ> ὑποτείνουσα ἐν <τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ>. Ὅμοίως οὖν, ἐπεὶ ἴσον ἔστιν τὸ ὑπὸ ΜΝ, ΜΛ τῷ ἀπὸ ΜΞ · <τοῦτο γὰρ φανε>ρόν <ἐστιν> · ἔσται ὡς ἡ <ΜΝ> πρὸς τὴν <ΜΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ>
- 30 πρὸς τὸ <ἀπὸ ΜΞ>. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ <ΜΝ> πρὸς τὸ ἀπὸ <ΜΞ>

sur $M\Xi$ est égal au rapport du triangle sur MN déterminé dans le prisme au triangle sur $M\Xi$ découpé dans le segment par la surface du cylindre¹, le triangle est donc au triangle comme MN est à $M\Lambda$. Mais nous montrerons de la même manière que, si dans le parallélogramme circonscrit à la parabole on mène une autre parallèle à KZ et qu'on élève sur la droite menée le plan perpendiculaire à EH , le triangle déterminé dans le prisme sera au triangle déterminé dans le segment de cylindre comme la parallèle à KZ menée dans le parallélogramme ΔH est au segment de droite intercepté entre la parabole EHZ et le diamètre EH . Dès lors, le parallélogramme ΔH étant rempli par les parallèles à KZ et le segment compris entre la parabole et le diamètre étant rempli par les segments de droite interceptés dans le segment.....² aux parallèles à KZ menées dans le parallélogramme ΔH , et le rapport de tous les triangles contenus dans le prisme à tous les triangles contenus dans le segment découpé du cylindre sera égal au rapport de toutes les droites dans le parallélogramme ΔH à toutes les droites interceptées entre la parabole et la droite EH . Or les

1. Cf. Eucl. VI, 19.

2. La lacune dans le texte grec n'a pu être comblée ; mais l'absence de cette partie du raisonnement ne dérange pas la fin de la démonstration.

- οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς MN τρίγωνον τὸ ἐν τῷ πρίσματι
γε(νόμενον πρὸς τὸ ἀπὸ ME τρίγωνον τὸ ἐν τῷ τμήματι
ἀφηρημένον) ὑπὸ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· ὥς
ἄρα ἡ MN πρὸς ML, (οὕτως τὸ τρίγωνον) πρὸς τὸ
5 τρίγωνον. Ὅμοίως δὲ (δ)εί(ξομεν καί), ἐὰν (ἄλλ)η
τ(ις ἀχθῇ ἐν τῷ περὶ τὴν τομὴν πε)ριγραφ(έντι) παραλ-
ληλογράμμῳ (παρὰ) τὴν KZ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης
ἐπί(πεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν) πρὸς τὴν EH, ὅτι ἔσται
ὡς τὸ τρίγωνον τὸ γενόμενον ἐν τῷ πρίσματι πρὸς τὸ
10 τμήματι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, οὕτως
ἡ ἀχθεῖσα (ἐν) τῷ ΔH παραλληλογράμμῳ παράλληλος
τῇ KZ (πρὸς τὴν) ἀποληφθεῖσαν ὑπὸ τῆς EHZ τοῦ
ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς EH διαμέτρου. Συμπλη-
ρωθέντος οὖν τοῦ ΔH παραλληλογράμμου ὑπὸ τῶν
15 ἡγμένων παρὰ τὴν KZ καὶ τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου
ὑπὸ τε τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς διαμέ-
τρου ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ἐν τῷ τμήματι συμπληρω
..... τοῦ τμήματος τοῦ ἐν τῷ ἀπὸ τοῦ
..... γινομ πων τὰ γ α καὶ
20 τῷ ΔH δὲ
ετι μα η
ετι ἀπ
..... ἀγομένων παρὰ τὴν KZ
..... τομῆς καὶ εἰ ταῖς ἐν
25 τῷ ΔH παραλληλογράμμῳ ἡγμέναις παρὰ τὴν KZ,
καὶ ἔσται ὡς πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἐν τῷ πρίσματι πρὸς
πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἐν τῷ ἀποτμηθέντι τμήματι τοῦ
κυλίνδρου ἀφηρημένα, οὕτως πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐν τῷ
ΔH παραλληλογράμμῳ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς
30 μεταξὺ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς EH

3 τῆς : om. || 4-5 πρὸς τὸ τρίγωνον : πρὸς τὴν seq. lacuna ||
6-7 παραλληλογράμμῳ suppl. Heiberg || 8 τὴν : om. || 10 τμή-
ματι : τμήμα^τ || 26 ὥς : om.

triangles dans le prisme composent le prisme, les triangles dans le segment découpé du cylindre composent ce segment, les parallèles à KZ dans le parallélogramme ΔH composent le parallélogramme ΔH , et les droites interceptées entre la parabole et la droite EH composent le segment de parabole¹ ; il s'ensuit que le prisme est au segment découpé du cylindre comme le parallélogramme ΔH est au segment EZ compris entre la parabole et la droite EH. Mais le parallélogramme ΔH est équivalent aux trois demis du segment compris entre la parabole et la droite EH comme nous l'avons démontré dans nos écrits publiés antérieurement² ; par conséquent, le prisme est à son tour équivalent aux trois demis du segment découpé du cylindre ; le segment découpé du cylindre est donc à deux comme le prisme est à trois. Mais le prisme est à trois comme le prisme entier, contenant le cylindre, est à douze, puisque l'un est équivalent au quart de l'autre, d'où il suit que le segment du cylindre est à deux comme le prisme entier est à douze ; par conséquent, le segment découpé du cylindre est la sixième partie du prisme.

15.

Soit un prisme droit ayant pour bases des carrés ; que le carré $AB\Gamma\Delta$ soit une de ces bases ; inscrivons dans le prisme un cylindre, dont la base soit le cercle EZH ; ce cercle est tangent aux côtés du carré aux points E, Z, H et Θ ; soit K son centre ; menons un

1. L'expression $\tau\eta\varsigma \pi\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta\varsigma$ constitue un anachronisme, dans ce texte, analogue à celui que nous avons relevé dans la prop. 3, à propos de $\eta \pi\lambda\alpha\chi\iota\alpha$ et $\eta \delta\rho\theta\iota\alpha$. Heiberg condamne ces termes comme interpolation.

2. Cf. *Quadr. parab.*, 24 ; *Méth.*, 1.

- εὐθείας. Καὶ ἐκ μὲν τῶν ἐν τῷ πρίσματι τριγώνων σύγκειται
 τὸ πρίσμα, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ <ἀποτμηθέντι
 ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τὸ ἀπότμημα, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῷ ΔΗ
 παραλληλογράμμῳ παραλλήλων τῇ ΚΖ τὸ ΔΗ παρα-
 5 ληλόγραμμον, ἐκ δὲ τῶν μεταξὺ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου
 κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ <τὸ τμήμα> [τῆς παραβολῆς] ·
 ὥς ἄρα τὸ πρίσμα πρὸς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου,
 οὕτω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖΗ τμήμα
 τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς
 10 καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας. Ἡμιόλιον δὲ τὸ ΔΗ παραλληλό-
 γραμμον τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς τοῦ
 ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας · δέδεικται
 γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις · ἡμιόλιον
 ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ πρίσμα τοῦ ἀποτμήματος τοῦ ἀφηρημένου
 15 ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου · οἷων ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ
 κυλίνδρου δύο, τοιούτων ἐστὶ τὸ πρίσμα τριῶν. Οἷων δὲ
 τὸ πρίσμα τριῶν, τοιούτων ἐστὶν τὸ ὅλον πρίσμα τὸ
 περιέχον τὸν κύλινδρον $\overline{\text{ιβ}}$ διὰ τὸ δ' εἶναι τὸ ἕτερον τοῦ
 ἐτέρου · οἷων ἄρα τὸ ἀπότμημα τοῦ κυλίνδρου δύο,
 20 τοιούτων ἐστὶν τὸ ὅλον πρίσμα $\overline{\text{ιβ}}$ · ὥστε τὸ τμήμα τὸ
 ἀποτμηθέν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ
 πρίσματος.

ιε'.

- Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις, ὧν
 25 μία ἔστω τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς
 τὸ πρίσμα κύλινδρος, οὗ βάσις ἔστω ὁ ΕΖΗ κύκλος ·
 <ἐφάπτεται> δὴ οὗτος τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν
 κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεία · κέντρον δὲ <ἔστω τὸ Κ, καὶ

plan par son diamètre EH et par le côté du¹ carré opposé qui correspond à $\Gamma\Delta$; ce plan découpe ainsi du prisme entier un prisme et du cylindre un segment de cylindre. Je dis que nous démontrerons que ce segment découpé du cylindre par le plan ainsi mené est la sixième partie du prisme entier.

Nous commencerons par démontrer qu'il sera possible d'inscrire dans le segment découpé du cylindre une figure solide et de lui en circonscrire une autre, les deux figures étant composées de prismes ayant la même hauteur et ayant pour bases des triangles semblables, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à toute grandeur donnée. Divisons², en effet, dans le demi-cercle EZH , le diamètre EH d'une façon continue en deux parties égales, menons par les points de division des parallèles à KZ coupant la circonférence du demi-cercle, menons par les points d'intersection de ces droites avec la circonférence des parallèles à EH et prolongeons-les de part et d'autre jusqu'à leur intersection avec les deux parallèles à KZ voisines ; faisons passer par les parallèles de chaque série des plans perpendiculaires au plan du demi-cercle ; ces plans formeront, dès lors, à l'intérieur et à l'extérieur du segment de cylindre des prismes de même hauteur et ayant pour bases des triangles rectangles apposés aux droites parallèles à KZ . Si maintenant la division de EH en deux parties égales est répétée jusqu'à ce que les deux prismes adjacents à KZ soient inférieurs à une grandeur donnée³, l'excès de la figure solide circonscrite au segment de cylindre, composée de prismes, sur la figure inscrite de la même manière sera moindre qu'un volume qui est lui-même inférieur à la grandeur donnée ; l'excès est en effet égal à la somme des deux prismes adjacents à KZ , puisque à tous les autres prismes de la figure circonscrite correspondent autant de prismes égaux de la figure inscrite.

1-3. Cf. notes complémentaires.

- διὰ τῆς> ΕΗ διαμέτρου <καὶ μιᾶς πλευρᾶς>.....
 <ἐπίπεδον ἤχθω>· τοῦτο δὴ τὸ ἐπίπεδον ἀποτεμνει
 πρίσμα ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος καὶ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου
 ἀπότμημα κυλίνδρου. <Λέγω δὴ ὅτι τοῦ>το <τὸ> τμήμα
 5 τὸ ἀποτετμημένον ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος
 ἐπιπέδου ἔκτον μέρος ὃν δειχθήσεται τοῦ ὅλου πρίσματος.
 Πρῶτον δὲ δεῖξομεν ὅτι δυνατόν ἔσται εἰς τὸ τμήμα
 τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα στερεὸν ἐγγράψαι
 καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ πρισμάτων συγκείμενον ἴσον
 10 ὕψος ἐχόντων καὶ βάσεις τριγώνους ἐχόντων ὁμοίας,
 ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν
 ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος μεγέθους..... γὰρ
 τοῦ πρίσματος τοῦ κατὰ τὸ ΒΔ παραλληλογράμμου
 καὶ... ω..... γραμμένου. ω..
 15 το...Ξ. ἐπιπέδω... <σ>ημεῖα τοῦ ατος... η...
 ρετό. πω..... νομεν..... εστ... σων..... ἔστω
 το... λειπόμενον... νι. μια ἔλασ..... ν... τοῦ λείμ-
 ματος. στ..... ε... εἰ... καὶ... εἰ... α τω.
 εἰ..... το... ατα.....
 20 τω ἐκ..... τμήμα τὸν το.....
 ἀπο<τ>μ<η>θ.... ἀπὸ.... δι..... ε... μάτων
 μεν.... ων.... ται καὶ τῶν..... ἐγγεγραμμένω
 ... δι..... των κει..... τα... ΚΩ παραλληλό-
 γραμμον..... αμμον..... σχήματι
 25 πρίσμα..... ησ..... τὸ ἀπὸ
 δρου. ἐγγεγράφθω..... μια.....
 σχῆμα, τὸ εἰρ<ημένον> σχῆμα
 τοῦ ἐγγεγραμμένου..... ἔχει... τοῦ δοθέντος
 ἔχέτω..... οσ..... τῶν πρισμάτων.....
 30 ἴσον αὐ... <ση>μεῖα
 ἐγγεγρά<φθω>..... ν ἔσ.....

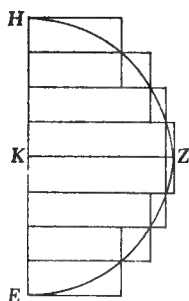


Fig. 133

De plus, si on décrit dans le demi-cercle une parabole EZH, qu'on mène par ses points d'intersection avec les parallèles à ZK des droites parallèles à EH et qu'on prolonge ces droites comme nous l'avons indiqué plus haut, on aura construit une figure circonscrite au segment de parabole, et une autre figure inscrite (sc. dans ce segment), les deux figures étant composées de parallélogrammes et telles que l'excès de la première sur la seconde soit égal à la somme des deux parallélogrammes adjacents à ZK ; de plus, les parallélogrammes correspondront chacun à un des prismes dans les figures solides que nous avons indiquées.

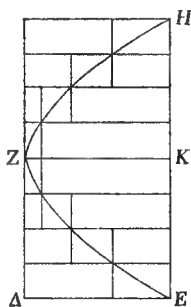


Fig. 134

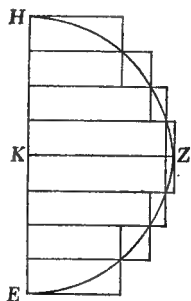


Fig. 133

δευτέρῳ γεγρ γει η <τέ-
 τμηται κατὰ τὸ αὐτὸ <ἐγγεγρ>αμμένον ἐν
 κύκλ . . . το<ὺ> τμήματος τη συνθε.τ . . .
 ἀπο μείζων ἐστὶν τοῦ ἐγγεγραμμένου <τμ>ή-
 5 ματος ἐν τῷ πρίσματι τῷ κατὰ τὸ ω

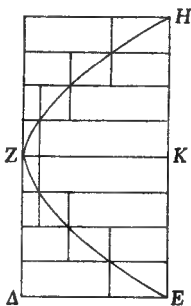


Fig. 134

Dès lors, si le segment découpé du cylindre n'est pas équivalent à la sixième partie du prisme entier, il est ou bien supérieur ou bien inférieur à cette sixième partie. Qu'il soit d'abord, si possible, supérieur ; le prisme découpé par le plan oblique est donc inférieur aux trois demis du segment de cylindre. Inscrivons donc et circonscrivons à ce segment de cylindre des figures solides telles que nous l'avons indiqué, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à une grandeur donnée. Du moment donc que, comme nous l'avons démontré¹, le rapport des droites menées dans le parallélogramme ΔH aux droites interceptées entre la parabole et la droite EH est égal au rapport des triangles du prisme découpé par le plan oblique aux triangles du segment découpé du cylindre, c'est-à-dire égal au rapport des prismes contenus dans le prisme découpé par le plan oblique aux prismes contenus dans la figure solide inscrite², diminués de deux, et que le rapport entre les droites indiquées est égal au rapport des parallélogrammes, en lesquels est divisé le parallélogramme ΔH , aux parallélogrammes contenus dans la figure inscrite dans la parabole³, moins deux, le prisme découpé par le plan oblique sera à la figure inscrite comme⁴ le parallélogramme ΔH est à la figure inscrite dans la parabole. Et comme le prisme découpé par le plan oblique est inférieur aux trois demis du segment de cylindre, et que l'excès de ce dernier sur la figure inscrite est inférieur à une grandeur donnée⁵, le prisme découpé par le plan oblique sera inférieur aux trois demis de la figure solide inscrite dans le segment découpé du cylindre. Mais on a démontré que le rapport du prisme découpé par le plan oblique à la figure solide inscrite dans le segment découpé du cylindre est égal au rapport du parallélogramme ΔH

1. Cf. prop. 14.

2. Cf. Eucl. XI, 32.

3. Cf. Eucl. VI, 1.

4. Cf. lemme 11.

5. Fin de la lacune.

- < ἔλασσον ἄρα ἢ ἡμιό>λιον τὸ πρίσμα τὸ ἀπο-
 τετμημένον ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐγγεγραμμένου
 εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου στερεοῦ. Ἐδείχθη
 δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου ἀφηρημένον πρίσμα
 5 πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ
 ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, οὕτως τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον
 πρὸς τὰ ἐγγεγραμμένα παραλληλόγραμμα εἰς τὸ τμήμα
 τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς
 καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας · ἔλασσον ἄρα ἢ ἡμιόλιον τὸ ΔΗ
 10 παραλληλόγραμμον τῶν παραλληλογράμμων τῶν ἐν
 τῷ τμήματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου
 κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας · ὅπερ ἀδύνατον, ἐπεὶ
 τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου
 κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας ἡμιόλιον δέδεικται τὸ
 15 ΔΗ παραλληλόγραμμον ἐν ἐτέροις. Οὐκ ἄρα μεῖ<ζον>

1 τὸ πρίσμα τὸ : τοῦ πρίσματος || 1-2 ἀποτετμημένον ὑπὸ
 suppl. Heiberg || 3 τὸ alt. : τοῦ || 4 ἀφηρημένον : ἀφηρημένου ||
 πρίσμα : πρίσματος || 7 τὸ om.

à la somme des parallélogrammes inscrits dans le segment compris entre la parabole et la droite EH ; il s'ensuit que le parallélogramme ΔH est inférieur aux trois demis de la somme des parallélogrammes contenus dans le segment compris entre la parabole et la droite EH, ce qui est impossible, puisqu'on a démontré ailleurs¹ que le parallélogramme ΔH est équivalent aux trois demis du segment compris entre la parabole et la droite EH. Par conséquent, le segment de cylindre n'est pas supérieur à la sixième partie du prisme entier.

Qu'il² soit donc, si possible inférieur à cette sixième partie ; le prisme découpé par le plan oblique est donc supérieur aux trois demis du segment de cylindre. Circonscrivons de nouveau (sc. au segment découpé du cylindre) une figure solide et inscrivons-lui en une autre de la manière indiquée ; nous démontrerons de la même manière que le rapport des prismes contenus dans le prisme découpé par le plan oblique aux prismes de la figure circonscrite au segment de cylindre est égal au rapport des parallélogrammes contenus dans le parallélogramme ΔH aux parallélogrammes de la figure circonscrite au segment compris entre la parabole et la droite EH³ ; il s'ensuit⁴ que le rapport de la somme des prismes contenus dans le prisme découpé par le plan oblique à la somme des prismes contenus dans la figure circonscrite au segment découpé du cylindre est égal au rapport de la somme des parallélogrammes contenus dans le parallélogramme ΔH à la somme des parallélogrammes contenus dans la figure circonscrite au segment compris entre la parabole et la droite EH, c'est-à-dire le rapport du prisme découpé par le plan oblique à la figure circonscrite au segment de cylindre sera égal au rapport du parallélogramme ΔH à la figure circonscrite au segment compris entre

1. Cf. *Quadr. parab.*, 24.

2. Nouvelle lacune, assez étendue ; le raisonnement a été reconstitué, en résumé, par Heiberg.

3. Fin de la lacune.

4. Cf. lemme 11.

- <στε-
 ρεὸν ἐτ..... <ἀ>ποτεμν..... σχῆμ<α>.....
 τα ὀρθο..... περιγραφ..... <τοῦ ἐγγρα->
 φέντος ἐν..... ἐπεὶ..... τμήματ.....
 5 ἐγγεγράφ<θω>..... ἐν τῷ τμήματι τῷ <περιεχο-
 μένῳ ὑπὸ τε> τῆς τοῦ ὀρθ<ογωνίου κώνου τομῆς> καὶ τῆς
 <ΕΗ εὐθείας>..... γεγράφ<ω>..... τοῦ ὀρθ<ογω-
 νίου κώνου>..... φέν περι..... <ἐγγεγραμ>μένον
 ἐν τ<ῷ>..... τοῦ κυλίνδρ<ου>..... τοῦ στερε<οῦ>
 10 τοῦ κυλίν<δρου>..... τμήματ..... ἐστὶν
 καὶ γραμμέν.....

 εχομεν νη
 15 Η τιν
 πρὸς τὸ τὸ ἐν τ<ῷ>
 <πε>ριεχομε..... γο ... τῆς ΕΗ
 καὶ τοῖς λόγ<οις> αμμέν.....
 τμήματος..... δρ νον ἀπὸ
 20 τῆς <τ>ῆς πλευρ<ᾱς>.....
 ἐν τῷ..... τετμή<σθω>.....
 ἐχθήσ..... τὸ μεῖ<ζον>.....
 <εὐθ>είας
 καὶ πάντα τὰ πρίσματα τὰ ἐν τῷ πρίσματι τῷ ἀποτε-
 25 τμημένῳ ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου πρὸς πάντα τὰ πρίσματα
 τὰ ἐν τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ ἀπότμημα
 τοῦ κυλίνδρου τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ὃν πάντα τὰ παραλ-
 ληλόγραμμα τὰ ἐν τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ πρὸς
 πάντα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐν τῷ σχήματι τῷ
 30 περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ
 τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας,

la parabole et la droite EH. Mais le prisme découpé par le plan oblique est supérieur aux trois demis de la figure solide circonscrite au segment de cylindre ; il¹ s'ensuit que le parallélogramme ΔH est lui aussi supérieur aux trois demis de la figure circonscrite au segment compris entre la parabole et la droite EH, ce qui est impossible, puisque nous avons démontré que le parallélogramme ΔH est supérieur aux trois demis du segment compris entre la parabole et la droite EH. Par conséquent, le segment de cylindre n'est pas non plus inférieur à la sixième partie du prisme entier ; n'étant ainsi ni supérieur ni inférieur, il est équivalent à la sixième partie du prisme, ce qu'il fallait démontrer.

1. Dernière lacune dans le texte grec de la prop. 15 ; la conclusion qui suit a été reconstituée par Heiberg.

τουτέστιν τὸ πρίσμα τὸ ἀποτετμημένον ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμήμα τοῦ κυλίνδρου τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ὃν τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον
 5 περὶ τὸ τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας. Μείζον δέ ἐστι τὸ πρίσμα τὸ ἀποτετμημένον ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου ἢ ἡμιόλιον τοῦ στερεοῦ σχήματος τοῦ περιγε(γραμμένου περὶ τὸ τμήμα τοῦ κυλίνδρου)

5 περὶ τὸ τμήμα τὸ περιεχόμενον suppl. Heiberg.

NOTICE

Ce traité contient quinze propositions, assez élégantes, de géométrie élémentaire, dont les plus importantes, 4 à 6 et 14, traitent des propriétés de deux figures planes dont l'une, l'ἄρθηλος ou tranchet de cordonnier, est comprise entre trois demis-circonférences tangentes deux à deux, ayant leurs diamètres sur la même droite et telles que le diamètre de la plus grande est égal à la somme des diamètres des deux autres, et qu'elles sont toutes situées du même côté de la droite, et dont l'autre, le σάλινον¹, est formée de quatre demi-circonférences, également tangentes deux à deux, mais dont trois sont situées d'un même côté de la droite portant les diamètres, alors que la quatrième est située de l'autre côté.

L'authenticité du *Livre des lemmes* est douteuse. Si certaines des découvertes qui y sont réunies pourraient bien être d'Archimède, l'ensemble manque de cette liaison entre les propositions qui caractérise la manière du grand géomètre dans les travaux qu'on sait être de lui. Il est probable que ce traité a été, déjà sous sa forme grecque aujourd'hui perdue, l'œuvre d'un compilateur ayant puisé à différentes sources, dont peut-être Archimède.

Il est conservé dans la version arabe, annotée par Almochtasso-Abul-Hasan, du savant Thabit-Ben-Corrah, qui vécut à Bagdad au ix^e siècle, et dont nous possédons

1. Sur ce mot, cf. la note à la prop. 14.

aussi des traductions arabes des *Éléments* d'Euclide, de l'*Almageste* de Ptolémée et des *Trailés* des coniques d'Apollonius. Cette version arabe, dont il existe trois manuscrits à la bibliothèque Laurentienne, fut traduite en latin, une première fois par Graeves, Londres, 1657, avec un commentaire de Samuel Forster, et une seconde fois par l'orientaliste Abraham Ecchellensis, Florence, 1661, avec un commentaire de Borelli.

Dans cette édition, nous présentons le texte latin d'Ecchellensis, accompagné du texte grec reconstitué, en 1965, par E. Stamatis¹.

1. Cf. 'Ανακατασκευή τοῦ ἀρχαίου κειμένου... δεκαπέντε θεωρημάτων τοῦ Ἀρχιμήδους κτλ., Bulletin de la Soc. Math. de Grèce, Nouvelle série, t. 6 II, fasc. 2, 1965, p. 265-297.

LE LIVRE DES LEMMES

1.

Si deux cercles sont tangents, comme le sont au point E les deux cercles AEB et CED, si leurs diamètres sont parallèles, comme le sont les deux diamètres AB et CD, et si on joint les deux points B et D au point de contact E par les droites DE et BD, la ligne BE sera une droite¹.

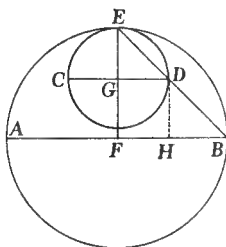


Fig. 135

Soit les deux centres G et F ; menons GF, prolongeons GF jusqu'à E, et menons la parallèle DH à GF. Comme

1. Dans son texte, accompagné de figures où les lettres latines sont remplacées par des lettres de l'alphabet grec, M. E. Stamatis a restitué le raisonnement complet des propositions, dont les versions arabe et latine ne donnent qu'un abrégé. Notre traduction est celle du texte latin.

LIBER ASSUMPTORUM

I.

α'.

Si mutuo se tangant duo circuli, ut duo circuli AEB, CED in E, fuerintque eorum diametri parallelæ, ut sunt duæ diametri AB, CD, et iungantur duo puncta B, D et contactus E <rectis> DE, BD, erit linea BE recta.

Εἴ καὶ ἡ δύο κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλήλων ἐντός, διάμετροι δὲ αὐτῶν παράλληλοι, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἀφῆς καὶ τῶν περάτων τῶν διαμέτρων δύο εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλήλαις ἐπ' εὐθείας.

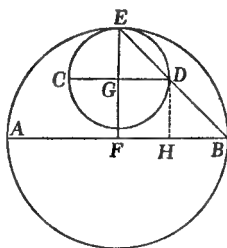


Fig. 135

Sint duo centra G, F, et iungatur GF, et producamus ad E, et educamus DH parallelam ipsi GF.

Ἐστωσαν δύο κύκλοι, ὧν κέντρα τὰ Ζ, Η, ἐπιψαύοντες ἀλλήλων κατὰ τὸ Ε σαμείον, διάμετρος δὲ αἱ ΑΒ παρὰ

HF est égal à GD et GD égal à EG, on conclut de l'égalité de FB et de FE que GF, c'est-à-dire DH, est égal à HB et que les deux angles HDB et HBD sont égaux. Puisque, de plus, les deux angles EGD et EFB sont droits et que les deux angles EGD et DHB sont égaux, les deux angles GED et GDE sont égaux entre eux et égaux aux angles HDB et HBD ; l'angle EDG est donc égal à l'angle DBF. Ajoutons de part et d'autre l'angle GDB ; la somme des deux angles GDB et FBD (égale à un angle bidroit)¹ est donc égale à la somme des angles GDB et GDE, d'où il suit que cette dernière somme est elle aussi égale à un angle bidroit et que la ligne EDB est une droite, et c'est ce que nous avons voulu démontrer².

2.

Soit le demi-cercle CBA, DC et DB deux tangentes,

1. Cf. Eucl. I, 29.

2. Cette proposition est utilisée par Pappus, *Coll. IV*, 23, p. 214 de l'édition F. Hultsch. Au VII^e livre de la *Collection*, prop. 175, p. 840, Pappus démontre que la prop. 1 du *Livre des lemmes* est vraie aussi dans le cas où les deux cercles sont tangents extérieurement, ce que note aussi le commentateur arabe Almochtasso.

Et quia HF aequalis est ipsi GD, suntque GD, EG aequales, ergo ex aequalibus FB, FE remanebunt GF, nempe DH et HB, quae erunt aequales, atque duo anguli HDB, HBD aequales. Et quia duo anguli EGD, EFB sunt recti, atque duo anguli EGD, DHB sunt aequales, remanebunt duo anguli GED, GDE, qui inter se et duobus angulis HDB, HBD aequales erunt; ergo angulus EDG aequalis est angulo DBF. Et comprehensus angulus GDB est communis; ergo erunt duo anguli GDB, FBD, (qui sunt pares duobus rectis), aequales duobus angulis GDB, GDE. Igitur ipsi quoque sunt aequales duobus rectis; ergo linea EDB est recta. Et hoc est quod uoluimus.

2.

Sit CBA semicirculus, quem DC, DB tangant, et

διάμετρον τὰν ΓΔ · φανὲ δὴ, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΔΒ εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλήλαις ἐπ' εὐθείας.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΖΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ποτὶ τὸ Ε, ἄχθω δὲ ἡ ΔΘ παρὰ τὰν ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΕ ἴσαι ἐντὶ καὶ ἡ ΗΔ τῇ ΖΘ, κοινὰ ἀφαιρήσθω ἡ ΖΘ, τουτέστιν ἡ ΗΕ · λοιπαὶ ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΘΔ, ΘΒ ἴσαι ἀλλαλαῖς ἐντὶ · γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΔΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΒΔ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ ΗΔΕ, ἐστὶν ἴσα · κοινὰ ποτικείσθω γωνία ἡ ὑπὸ ΗΔΒ · συναμφότερος ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ ΗΔΒ, ΔΒΖ συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ΕΔΗ ἐστὶν ἴσα · ἔστι δὲ συναμφότερος ἡ ὑπὸ ΗΔΒ, ΔΒΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα · συναμφότερος ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ ΗΔΒ, ΕΔΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἐστὶν ἴσα · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐντὶ εὐθεῖαι αἱ ΕΔ, ΔΒ · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

β'.

Ἐστω ἀμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι

et soit BE perpendiculaire à AC ; joignons A à D par la droite AD ; BF sera alors égal à FE.

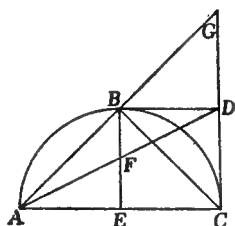


Fig. 136

Démonstration. Menons la droite AB, prolongeons la jusqu'à sa rencontre avec le prolongement de CD au point G, et menons la droite CB. L'angle CBA étant inscrit dans un demi-cercle, il sera droit¹ ; il s'ensuit que l'angle CBG est droit² et que DBEC est un parallélogramme rectangle³. Dans le triangle rectangle GBC, BD est donc la perpendiculaire abaissée de B sur la base, et BD et DC seront égaux comme étant des tangentes au cercle ; CD est donc aussi égal à DG, comme nous l'avons démontré dans nos propo-

1. Cf. Eucl. III, 31.

2. Cf. Eucl. I, 13.

3. Ceci n'est vrai que dans l'hypothèse, admise dans la figure, que B est le milieu de la demi-circonférence ABC. La proposition a été démontrée pour le cas général d'un point B quelconque sur la demi-circonférence ABC par Torelli et Barrow et, plus récemment, par Th. Heath ; sur ces trois auteurs cf. l'Introduction.

BE perpendicularis super
AC, et iungamus AD ;
erit BF aequalis ipsi FE.

αὐτοῦ αἱ ΔΒ, ΔΓ, ἃ δὲ ΒΕ
ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τῇ ΑΓ,
ἐπεξεύχθω δὲ ἃ ΑΔ· φανὲν
δὴ τὰν ΒΖ ἴσαν εἶμεν τῇ
ΖΕ.

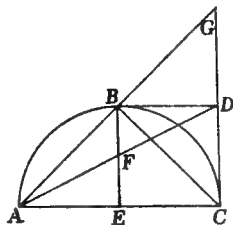


Fig. 136

Demonstratio. Iungamus AB eamque producamus in directum et educamus CD quousque illi occurrat in G, et iungamus CB. Et quia angulus CBA est in semicirculo, erit rectus; remanet CBG rectus, et DBEC est parallelogrammum rectangulum. Ergo in triangulo GBC rectangulo educitur perpendicularis BD ex B erecta super basim, et BD, DC erunt aequales eo quod tangunt circulum; ergo CD est etiam aequalis

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἃ ΑΒ
καὶ ἐκβληθεῖσαι αἱ ΑΒ,
ΓΔ συμπιπτέτωσαν κατὰ
τὸ Η σημεῖον καὶ ἄχθω ἃ
ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν γωνία \hat{A} ὑπὸ $\Gamma B A$ ὀρθή ἐστιν, ἐσσεύεται καὶ γωνία \hat{A} ὑπὸ $\Gamma B H$ ὀρθή· ἔστι δὲ καὶ εὐθεία $\hat{A} B \Delta$ τῇ $\Delta \Gamma$ ἴσα· ἐσσεύεται ἄρα καὶ εὐθεία $\hat{A} \Delta H$ τῇ ΔB ,

sitions sur les rectangles¹. Comme dans le triangle GAC la droite BE est parallèle à la base et que nous avons mené du milieu D (sc. de la base CG) la droite DA coupant la parallèle BE en F, BF sera égal à FE, et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

3.

Soit CA un segment de cercle, B un point situé sur sa circonférence, et BD la perpendiculaire (sc. abaissée de B) à (sc. la corde) AC ; que le segment de droite DE soit égal à DA et l'arc BF égal à l'arc BA ; la droite CF sera égale à CE².

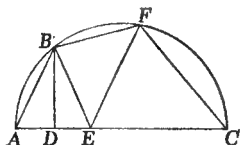


Fig. 137

Démonstration. Menons les droites AB, BF, FE et

1. Seuls les auteurs arabes semblent avoir connu un livre d'Archimède sur les rectangles.

2. Sur la figure du ms., l'arc ABFC est un demi-cercle ; mais la proposition est vraie aussi si ABFC est un arc quelconque. Ptolémée déduit de cette proposition, appliquée au cas particulier du demi-cercle, la détermination de la corde sous-tendant la moitié d'un arc dont on connaît la corde et le rayon, cf. *Almageste* I, 10, éd. Heiberg, p. 39.

ipsi DG, quemadmodum ostendimus in propositionibus, quas confecimus de rectangulis. Et quia in triangulo GAC linea BE educta est parallela basi, et iam educta est ex D semipartitione basis linea DA secans parallelam in F, erit BF aequalis ipsi FE. Et hoc est quod uoluimus.

τουτέστι τῇ ΔΓ ἴσα. Καὶ ἐπεὶ ἡ BE παρὰ τὰν ΗΓ ἐστίν, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ἡ BZ τῇ ZE ἴσα · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

3.

γ'.

Sit CA segmentum circuli et B punctum super illud ubicunque et BD perpendicularis super AC et segmentum DE aequale DA et arcus BF aequalis arcui BA ; utique iuncta CF erit aequalis ipsi CE.

Ἐστω τμήμα κύκλου τὸ ΑΓ καὶ ἀπὸ σαμείου τινος Β τῆς περιφερείας ἄχθω τῇ ΑΓ ποτ' ὀρθὰς ἡ ΒΔ, λελάφθω δὲ εὐθεῖα ἡ ΔΕ εὐθεῖα τῇ ΔΑ ἴσα καὶ περιφέρεια ἡ BZ τῇ AB · φημι δὴ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΖ εὐθεῖα τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴσα.

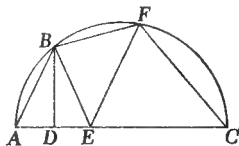


Fig. 137

Demonstratio. Iungamus lineas AB, BF, FE,

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ AB, BZ, ZE, EB εὐθεῖαι ·

EB. L'arc BA étant égal à l'arc BF, la corde AB sera égale à la corde BF. Puisque, d'autre part, (sc. dans les triangles ADB et EDB), AD est égal à ED, que les deux angles de sommet D sont droits, et que le côté DB leur est commun, AB est égal¹ à BE, d'où il suit que BF et BE sont égaux et que les deux angles BFE et BEF sont égaux. Comme, de plus, le quadrilatère CFBA est inscrit dans un cercle, la somme de l'angle CFB et de l'angle CAB qui lui est opposé, c'est-à-dire la somme des angles CFB et BEA, est égale à un angle bidroit²; mais la somme des angles CEB et BEA est aussi égale à un angle bidroit; par conséquent, les deux angles CFB et CEB sont égaux ainsi que, partant, les angles CFB et CEB; il en résulte que les angles CFE et CEF sont égaux; par conséquent CE est égal à CF, et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

1. Cf. Eucl. I, 4.

2. Cf. Eucl. III, 22.

EB. Et quia arcus BA aequalis est arcui BF, erit AB aequalis BF. Et quia AD aequalis est ED, et duo anguli D sunt recti, et DB communis, ergo AB aequalis est BE, et propterea BF, BE sunt aequales, et duo anguli BFE, BEF sunt aequales. Et quia quadrilaterum CFBA est in circulo, erit angulus CFB cum angulo CAB ipsi opposito, immo cum angulo BEA, aequalis duobus rectis. Sed angulus CEB cum angulo BEA aequales sunt duobus rectis ; ergo duo anguli CFB, CEB sunt aequales. Et remanent CFE, CEF aequales ; ergo CE aequalis est CF. Et hoc est quod uoluimus.

καὶ ἐπεὶ ἂ $\Lambda\Delta$ τῇ ΔE ἐστὶν ἴσα, κοινὰ δὲ ἂ $\text{B}\Delta$, δύο δὴ αἱ $\Lambda\Delta$, ΔB δυσὶ ταῖς $\text{E}\Delta$, ΔB ἑκατέρα ἑκατέρα ἴσαι ἐντί · ἔστι δὲ γωνία ἂ ὑπὸ $\Lambda\Delta\text{B}$ γωνία τῇ ὑπὸ $\text{E}\Delta\text{B}$ ἴσα · βάσις ἄρα ἂ EB βάσει τῇ AB , τουτέστι τῇ BZ , ἐστὶν ἴσα · γωνία ἄρα ἂ ὑπὸ BEZ γωνία τῇ ὑπὸ BZE ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐπεὶ τετράπλευρον τὸ $\text{A}\text{B}\text{Z}\Gamma$ ἐν κύκλῳ ἐστὶν, γωνίαι αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ $\Gamma\text{Z}\text{B}$, $\Gamma\text{A}\text{B}$, τουτέστιν αἱ ὑπὸ $\Gamma\text{Z}\text{B}$, BEA , δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί. Ἔστι δὲ καὶ συναμφότερος ἂ ὑπὸ $\Gamma\text{E}\text{B}$, BEA δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα · κοινὰ ἀφαιρήσθω ἂ ὑπὸ BEA · γωνία ἄρα ἂ ὑπὸ $\Gamma\text{Z}\text{B}$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Gamma\text{E}\text{B}$ ἐστὶν ἴσα · κοινὰ ἀφαιρήσθω ἂ ὑπὸ BZE , τουτέστιν ἂ ὑπὸ BEZ · λοιπαὶ ἄρα αἱ ποτὶ τῇ βάσει τῇ EZ τριγώνου τοῦ $\text{E}\Gamma\text{Z}$ γωνίαι αἱ ὑπὸ $\Gamma\text{Z}\text{E}$, $\text{Z}\text{E}\Gamma$ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί · πλευρὰ ἄρα ἂ $\text{Z}\Gamma$ πλευρᾷ τῇ $\text{E}\Gamma$ ἐστὶν ἴσα · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

4.

Soit ABC un demi-cercle ; construisons sur le diamètre AC deux demi-cercles (sc. tangents entre eux), l'un (sc. sur) AD, l'autre (sc. sur) DC, et élevons la perpendiculaire DB (sc. à CA) ; la figure ainsi déterminée, appelée Arbelos par Archimède (c'est-à-dire l'aire comprise entre l'arc du grand demi-cercle et les circonférences des deux petits demi-cercles) est équivalente au cercle ayant pour diamètre la perpendiculaire DB.

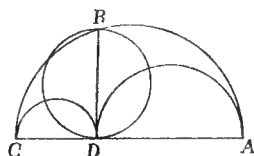


Fig. 138

Démonstration. Puisque DB est la moyenne proportion-

4.

δ'.

Sit ABC semicirculus, et fiant super AC diametrum duo semicirculi, quorum unus AD, alter uero DC, et DB perpendicularis; utique figura proveniens, quam uocat Archimedes Arbelon (est figura comprehensa ab arcu semicirculi maioris et duabus circumferentiis semicircularum minorum) est aequalis circulo, cuius diameter est perpendicularis DB.

Εἷ κα ἐν ἀμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾷς διαμέτρου ἦ, γραφέντων δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾷς διαμέτρου δύο ἀμικύκλια ἐντός, ἀναστακῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λαφθέντος σαμείου εὐθεῖα ποτὶ τῇ περιφερείᾳ τῇ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθὰς, σχῆμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον ἴσον ἐστὶ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἂ ἀναστακεῖσα κάθετος.

Ἐστω ἀμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ σαμεῖόν τι ἐπὶ διαμέτρου τᾷς ΑΓ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ διαμέτρων τῶν ΓΔ, ΔΑ ἀμικύκλια ἀναγεγράφθων ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς τῇ ΑΓ ἡ ΔΒ· φανὶ δὴ, σχῆμα

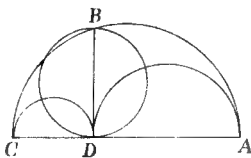


Fig. 138

Demonstratio. Quia linea DB media propor-

τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον,

nelle¹ entre DA et DC, le rectangle de côtés AD et DC sera équivalent² au carré sur DB. Ajoutons de part et d'autre le rectangle de côtés AD et DC et les deux carrés sur AD et sur DC ; le double du rectangle de côtés AD et DC, augmenté des deux carrés sur AD et sur DC, c'est-à-dire³ le carré sur AC, sera alors équivalent au double du carré sur DB, augmenté des deux carrés sur AD et sur DC. Or le rapport des cercles est égal au rapport des carrés (sc. sur leurs diamètres)⁴ ; il s'ensuit que le cercle de diamètre AC est équivalent à la somme du double du cercle de diamètre DB et des deux cercles de diamètres AD et DC, et que le demi-cercle de diamètre AC est équivalent à la somme du cercle de diamètre DB et des deux demi-cercles de diamètres AD et DC. Retranchons de part et d'autre les deux demi-cercles de diamètres AD et DC. La figure qui reste d'un côté, à savoir l'aire comprise entre les demi-cercles sur AC, AD et DC (et c'est là la figure appelée Arbelos par

1. Cf. Eucl. VI, 13.

2. Cf. Eucl. VI, 17.

3. Cf. Eucl. II, 4.

4. Cf. Eucl. XII, 2.

tionalis est inter duas lineas DA, DC, erit planum AD in DC aequale quadrato DB. Et ponamus AD in DC cum duobus quadratis AD, DC communiter ; fiet planum AD in DC bis cum duobus quadratis AD, DC, nempe quadratum AC, aequale duplo quadrati DB cum duobus quadratis AD, DC. Et proportio circulorum eadem est ac proportio quadratorum ; ergo circulus, cuius diameter est AC, aequalis est duplo circuli, cuius diameter est DB, cum duobus circulis, quorum diametri sunt AD, DC, et semicirculus AC aequalis est circulo, cuius diameter est DB, cum duobus semicirculis AD, DC. Et auferamus

τουτέστι τοῦ μείζονος ἀμικυκλίου καὶ τῶν δύο ἀναγραφέντων ἐντός, ὅπερ ἄρβηλος καλείσθω, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΔΒ, ἴσον ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἐξῆς ἀνάλογόν ἐντι, ἐσσεῖται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τῷ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἴσον · κοινὸν ποτικείσθω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ · τὸ ἄρα ἀπὸ τᾶς ὅλας τετράγωνον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ, τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δις τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐπεὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ἀπὸ τᾶν διαμέτρων τετράγωνά ἐντι, ἐσσεῖται δὴ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΓ, δυσὶ κύκλοις, ὧν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ δυσὶ κύκλοις, ὧν διαμέτροι αἱ ΑΔ, ΔΓ, ἴσος, τουτέστιν ἀμικύκλιον τὸ ΑΓ ἴσον κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ δυσὶν ἀμικυκλίοις, ὧν διαμέτροι αἱ ΑΔ, ΔΓ · κοινὸν ἀφαιρήσθω ἀμικύκλια τὰ ΑΔ, ΔΓ · λοιπὸν ἄρα

Archimède), est alors équivalente (sc. à la figure qui reste de l'autre côté, à savoir) au cercle de diamètre DB, et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

5.

Si on se donne sur le diamètre AB d'un demi-cercle un point quelconque C, si on décrit les deux demi-cercles sur AC et sur CB et qu'on élève en C la perpendiculaire CD sur AB, et si on construit de part et d'autre de cette perpendiculaire les deux cercles tangents à la perpendiculaire et aux demi-cercles, ces deux cercles sont égaux.

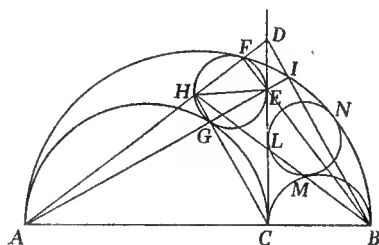


Fig. 139

duos semicirculos AD, DC communiter ; remanet figura, quam continent semicirculi AC, AD, DC (et est figura quam uocavit Archimedes Arbelos), aequalis circulo, cuius diameter est DB. Et hoc est quod uoluimus.

χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ περιφερειῶν τῶν ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ, ὅπερ ἄρβηλος καλεῖται, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΔΒ, ἐστὶν ἴσον· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

5.

ε'.

Si fuerit semicirculus AB, et signatum fuerit in eius diametro punctum C ubicunque, et fiant super diametrum duo semicirculi AC, CB, et educatur ex C perpendicularis CD super AB, et describantur ad utrasque partes duo circuli tangentes illam et tangentes semicirculos, utique illi duo circuli sunt aequales.

Εἴ κα ἐν ἀμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἦ, καὶ γραφέντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῆς διαμέτρου δύο ἀμικύκλια ἐντός, ἀναστακῇ δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου εὐθεῖα τῇ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθάς, καὶ δύο κύκλοι γραφέντι ἐπ' ἀμφοτέρα τῆς ἀνεστακούσας ἐπιψαύοντες αὐτάς καὶ τῶν ἀμικυκλίων, οἱ γραφέντες κύκλοι ἐσσοῦνται ἀλλάλοις ἴσοι.

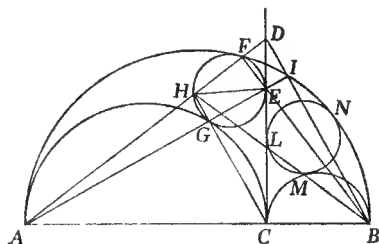


Fig. 139

Démonstration. Que l'un des deux cercles soit tangent à DC en E, au demi-cercle sur AB en F et au demi-cercle sur AC en G ; menons le diamètre HE ; il sera parallèle au diamètre AB parce que les deux angles HEC et ACE sont droits¹ ; menons FH et HA ; d'après la proposition² 1, la ligne AF est une droite ; les droites AF et CE se rencontreront en D, parce qu'elles sont menées sous les angles A et C dont la somme est inférieure à deux angles droits³. Menons aussi FE et EB ; la ligne EFB est alors une droite, d'après ce que nous avons dit⁴, et elle est perpendiculaire à AD, parce que l'angle AFB est droit comme inscrit⁵ dans la demi-circonférence sur AB. Menons maintenant HG et GC ; la ligne HC sera également une droite, et de même⁶ la ligne EA, si nous menons EG et GA ; prolongeons EA

1. Cf. Eucl. I, 28.

2. C'est-à-dire d'après la prop. 1 appliquée à des cercles tangents extérieurement.

3. Cf. Eucl. I, post. 5.

4. Cf. prop. 1.

5. Cf. Eucl. III, 31.

6. D'après la prop. 1 généralisée.

Demonstratio. Sit alter circulorum tangens DC in E et semicirculum AB in F et semicirculum AC in G, et educamus diametrum HE ; erit parallela diametro AB, eo quod duo anguli HEC, ACE sunt recti. Et iungamus FH, HA ; ergo linea AF est recta, uti dictum est in propositione I. Et occurrent AF, CE in D, eo quod egrediuntur ab angulis A, C, minoribus duobus rectis.

Et iungamus etiam FE, EB ; ergo EFB est etiam recta, ut diximus, et perpendicularis super AD, eo quod angulus AFB est rectus, quia cadit in semicirculum AB. Et iungamus HG, GC ; erit HC etiam recta. Et iungamus EG, GA ; erit EA recta ; et producamus eam ad I et iungamus BI, quae erit etiam perpendicularis super AI, et iungamus

Ἐστω ἀμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἃ AB, σαμεῖον δέ τι ἐπ' αὐτᾶς τὸ Γ· ἀναγεγράφθω δὲ ἀπὸ τμαμάτων τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς διαμέτρῳ τῇ AB ἃ ΓΔ, γεγράφθων δὲ δύο κύκλοι ἐπ' ἀμφοτέρα τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας ἐπιψαύοντες τὰς τε ἀνεστακούσας καὶ τῶν ἀμικυκλίων· φημι δὴ, οἱ γραφέντες κύκλοι ἴσοι ἀλλάλοις ἐντί.

Ἐστω γὰρ πρότερον κύκλος ὁ ἐπιψαύων τᾶς ΓΔ κατὰ τὸ E σαμεῖον καὶ ἀμικυκλίου μὲν τοῦ ΑΓ κατὰ τὸ H, ἀμικυκλίου δὲ τοῦ AB κατὰ τὸ Z, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου ἃ ΘΕ· ἐπιζευχθεῖσαι δὴ αἱ ΑΘ, ΘΖ εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ ΑΖ, ΓΕ εὐθεῖαι συμβαλέτωσαν κατὰ τὸ Δ σαμεῖον· ὁμοίως δὴ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΖΕ, ΕΒ ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, καὶ αἱ ΘΗ, ΗΓ, καὶ αἱ ΕΗ, ΗΑ, ἐκβεβλήσθω δὲ ἃ ΑΕ ἐπὶ τὸ I σαμεῖον,

jusqu'à I et menons BI, qui sera perpendiculaire¹ à AI ; menons DI. Du moment, dès lors, que AD et AB sont deux droites, que DC est la perpendiculaire abaissée de D sur AB et BF la perpendiculaire abaissée de B à DA, que ces deux perpendiculaires se coupent en E, et que, enfin, AE prolongé jusqu'à I est perpendiculaire à BI, la ligne BID sera une droite, comme nous l'avons démontré dans les propositions établies par nous dans le traité sur les triangles rectangles². Comme les deux angles AGC et AIB sont droits, BD et CG sont parallèles³, de façon que le rapport de AD à DH, égal au rapport de AC à HE, est égal⁴ au rapport de AB à BC ; il s'ensuit que le rectangle de côtés AC et CB est équivalent⁵ au rectangle de côtés AB et HE. On démontre de la même manière, pour le cercle LMN, que le rectangle de côtés AC et CB est équivalent au rectangle ayant pour côtés AB et le diamètre de ce cercle, et on démontre aussi, partant, que les diamètres des deux cercles EFG et LMN sont égaux ; par conséquent ces deux cercles sont égaux, ce que nous avons voulu démontrer.

1. Cf. Eucl. III, 31.

2. Allusion, d'après Heiberg, *Quaestiones Archimedeae*, Copenhague 1879, p. 30, à un commentaire d'un livre d'Archimède sur les triangles rectangles. Ce livre n'est mentionné que par les Arabes.

3. Cf. Eucl. I, 28.

4. Cf. Eucl. VI, 2.

5. Cf. Eucl. VI, 16.

DI. Et quia AD, AB sunt duae rectae et educta ex D ad lineam AB perpendicularis DC et ex B ad DA perpendicularis BF, quae se mutuo secant in E, et educta AE ad I est perpendicularis super BI, erunt BID rectae, quemadmodum ostendimus in propositionibus, quas confecimus in expositione tractatus de triangulis rectangulis. Et quia duo anguli AGC, AIB sunt recti, utique BD, CG sunt parallelae, et proportio AD ad DH, quae est ut AC ad HE, est ut proportio AB ad BC; ergo rectangulum AC in CB aequale est rectangulo AB in HE. Et similiter demonstratur in circulo LMN quod rectangulum AC in CB aequale sit rectangulo AB in suam diametrum, et demonstratur inde etiam quod duae diametri circulorum EFG, LMN sint aequales; ergo illi duo circuli sunt aequales. Et hoc est quod uolumus.

ἄχθω δὲ ἡ BI εὐθεῖα καὶ ἡ ZD. Ἐπεὶ οὖν αἱ AD, AB εὐθεῖαί ἐντι καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου τῇ AB ἄκται ποτ' ὀρθὰς ἡ ΔΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ B ποτ' ὀρθὰς τῇ ΔΑ ἡ BZ τέμνουσα τὰν ΔΓ κατὰ τὸ E, εὐθεῖα δὲ ἡ AEI ποτ' ὀρθὰς τῇ BI ἐστίν, ἐσσοῦνται ἄρα εὐθεῖαι αἱ BI, ID ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ὡς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων δέδεικται. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ BD παρὰ τὰν ΓΗ ἐστίν, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἡ AD ποτὶ τὰν ΔΘ, ὃν ἔχει ἡ AG ποτὶ τὰν ΘΕ, τουτέστιν ἡ AB ποτὶ τὰν ΒΓ · τὸ ἄρα ὑπὸ τὰν AG, ΓΒ τῷ ὑπὸ τὰν AB, ΘΕ ἐστὶν ἴσον · ὁμοίως δὲ δείξομες ὅτι ἐν κύκλῳ τῷ LMN τὸ ὑπὸ τὰν AG, ΓΒ τῷ ὑπὸ AB καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ LMN κύκλου ἴσον ἐστίν · αἱ διάμετροι ἄρα κύκλων τῶν EZH, LMN ἴσαι ἐντί, τουτέστιν οἱ δύο κύκλοι ἴσοι ἐντί · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

6.

Si¹ on prend sur le diamètre d'un demi cercle ABC un point D de manière que AD soit égal aux trois demis de DC, si on décrit sur AD et sur DC deux demi-cercles, qu'on place entre les trois demi-cercles le cercle EF de manière qu'il leur soit tangent et qu'on mène dans ce cercle le diamètre EF parallèle au diamètre AC, il faut trouver le rapport du diamètre AC au diamètre EF.

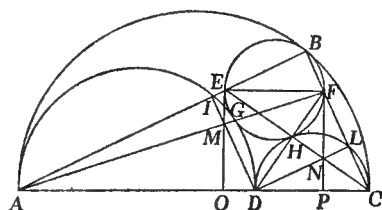


Fig. 140

Menons les deux droites AE et EB ainsi que les deux droites CF et FB ; CB et AB seront alignés, comme nous l'avons dit dans la première proposition. Menons aussi les deux lignes FGA et EHC qu'on démontrera

1. Cf. Pappus IV, 26 ; p. 224 sq.

6.

Si fuerit semicirculus ABC, et in eius diametro sumatur punctum D, et fuerit AD ipsius DC sesquialtera, et describantur super AD, DC duo semicirculi, et ponatur circulus EF inter tres semicirculos tangens eos, et educatur diameter EF in illo parallela diametro AC, reperiri debet proportio diametri AC ad diametrum EF.

ζ'.

Εἷ κα ἐν ἀμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾷ διαμέτρου η , καὶ γραφέντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾷς διαμέτρου δύο ἀμικύκλια ἐντός, γραφῇ δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἀμικυκλίων, τὸν λόγον τᾷς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἀμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου εὐρεῖν.

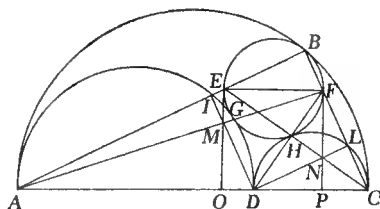


Fig. 140

Iungamus enim duas lineas AE, EB et duas lineas CF, FB; erunt CB, AB rectae, ut dictum est in prima propositione. Describamus etiam duas

Ἐστω ἀμικύκλιον τὸ ABΓ, σαμεῖόν δέ τι ἐπὶ τᾷ διαμέτρου τὸ Δ καὶ πεποιήσθω οὕτως, ὥστε τὸ μείζον τμᾶμα τὸ ΑΔ ἐλάσσονος τοῦ ΔΓ ἀμιόλιον εἶμεν, καὶ ἀπὸ τμαμάτων τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀναγεγράθων ἀμικύ-

être¹, elles aussi, des droites, de même que les lignes DE et DF ; menons DI et DL ainsi que EM et FN et prolongeons ces dernières droites jusqu'aux points O et P. Du moment que dans le triangle AED la droite AG est perpendiculaire à ED et DI perpendiculaire à AE, et que ces deux perpendiculaires se coupent en M, la droite EMO sera aussi perpendiculaire (sc. à AC), comme nous l'avons démontré dans notre exposé des propriétés des triangles, dans une démonstration à laquelle nous avons déjà fait allusion dans la proposition précédente ; pour les mêmes raisons, FP aussi sera perpendiculaire à CA. Et comme les deux angles de sommets L et B sont droits², DL sera parallèle à AB et DI à CB ; il s'ensuit que AD est à DC comme³ AM est à FM, c'est-à-dire comme AO est à OP, et que CD est à DA comme CN est à NE, c'est-à-dire comme CP est à PO. Or AD est égal (sc. par hypothèse) aux trois demis de DC ; il s'ensuit que AO est égal aux trois demis de OP, et que OP est égal aux trois demis de CP. Les trois segments de droite AO, OP et PC sont donc proportionnels, et dans la même mesure, dans laquelle

1. D'après la prop. 1 généralisée.

2. Cf. Eucl. III, 31.

3. Cf. Eucl. VI, 2.

lineas FGA, EHC, ostendeturque esse quoque rectas ; similiter duas lineas DE, DF, et iungamus DI, DL et EM, FN et producamus eas ad O, P. Et quia in triangulo AED AG est perpendicularis ad ED, et DI est quoque perpendicularis ad AE, et iam se mutuo secuerunt in M, ergo EMO erit etiam perpendicularis, quemadmodum ostendimus in expositione, quam confecimus de proprietatibus triangulorum, et cuius demonstratio iam quidem praecessit in superiori propositione ; similiter quoque erit FP perpendicularis super CA. Et quia duo anguli, qui sunt apud L et B, sunt recti, erit DL parallela ipsi AB, et pariter DI ipsi CB ; igitur proportio AD ad

κλια, γεγράφθω δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ὁ EZ ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἀμικυκλίων, καὶ ἄχθω διάμετρος αὐτοῦ παρὰ τὰν ΑΓ ἢ ΕΖ. Εὐρεῖν τὸν λόγον διαμέτρου τᾶς ΑΓ ποτὶ διάμετρον τὰν ΕΖ.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ εὐθεῖαι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΒ · εὐθεῖαι δὴ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΒ, ὥς ἐν τοῖς πρότερον ἐδείχθη. Ἐπεξεύχθωσαν ἔτι αἱ ΖΗΑ, ΕΘΓ · δείκνυνται δὴ αὗται εὐθεῖαι οὖσαι · ἔτι δὲ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ αἱ ΔΙ, ΔΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΜ, ΖΝ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ο, Ρ σαμεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΕΔ ἡ ΑΗ τῇ ΕΔ ποτ' ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἡ ΔΙ τῇ ΑΕ, τέμνοντι δὲ ἀλλάλας κατὰ τὸ Μ σαμεῖον, ἡ ΕΜΟ τῇ ΑΓ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς, ὥς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τριγώνων ἐδείχθη καὶ τῷ πρότερον ὑπέκειτο · διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΝΡ τῇ ΓΑ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς · ἔστι δὲ εὐθεῖα ἡ ΔΛ παρὰ τὰν ΑΒ καὶ ἡ ΔΙ παρὰ τὰν ΓΒ · ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει

PC est égal à quatre, OP sera égal à six, AO égal à neuf, et CA égal à dix-neuf. Et comme PO est égal à EF, AC sera à EF comme dix-neuf est à six¹. Nous trouvons ainsi le rapport cherché. Et même si le rapport de AD à DC était quelconque (sc. au lieu d'être égal au rapport de trois à deux), par exemple celui de quatre à trois ou de cinq à quatre ou tout autre rapport, on jugerait et raisonnerait comme nous l'avons fait. Et c'est ce que nous avons voulu montrer.

1. On a, en effet, d'après le théorème de Thalès, $\frac{AD}{DC} = \frac{AM}{FM} = \frac{AO}{OP}$, et $\frac{CD}{DA} = \frac{CN}{NE} = \frac{CP}{PO}$; par hypothèse $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{2}$, d'où $\frac{AO}{OP} = \frac{3}{2}$ et $\frac{CP}{PO} = \frac{2}{3}$; en posant $PC = 4$, on a $OP = \frac{3}{2} PC = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$; $AO = \frac{3}{2} OP = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$, et $CA = AO + OP + PC = 9 + 6 + 4 = 19$; par conséquent $\frac{CA}{OP} = \frac{19}{6}$, et, comme $OP = EF$, $\frac{CA}{EF} = \frac{19}{6}$.

DC est, ut proportio AM ad FM, immo ut proportio AO ad OP, et proportio CD ad DA, ut proportio CN ad NE, immo ut proportio CP ad PO. **Ε** erat AD sesquialtera DC; ergo AO est sesquialtera OP et OP sesquialtera CP. Ergo tres lineae AO, OP, PC sunt proportionales, et in eadem mensura, in qua est PC quattuor, erit OP sex et AO novem et CA nouendecim. Et quia PO aequalis est EF, erit proportio AC ad EF ut nouendecim ad sex. Igitur reperimus dictam proportionem. Etiam si fuerit AD ad DC qualiscunque, ut sesquitertia aut sesquiquarta aut alia, erit iudicium et ratio uti dictum est. Et hoc est quod volumus.

ἂ **ΑΔ** ποτὶ τὰν **ΔΓ**, ὃν ἔχει ἂ **ΑΜ** ποτὶ τὰν **ΜΖ**, τουτέστιν ἂ **ΑΟ** ποτὶ τὰν **ΟΡ**, καὶ ἂ **ΓΔ** ποτὶ τὰν **ΔΑ** τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἔχει ἂ **ΓΝ** ποτὶ τὰν **ΝΕ**, τουτέστιν ἂ **ΓΡ** ποτὶ τὰν **ΡΟ** · ἦν δὲ ἂ **ΑΔ** ἀμύλιος τᾶς **ΔΓ** · καὶ ἂ **ΑΟ** ἄρα τᾶς **ΟΡ** ἐστὶν ἀμύλιος, καὶ ἂ **ΟΡ** τᾶς **ΓΡ** · εὐθεῖαι ἄρα αἱ **ΑΟ**, **ΟΡ**, **ΡΓ** ἐξῆς ἀνάλογόν ἐντι, ἂν ἂ μὲν **ΡΓ** ἴσα γίνεται τέσσαρα, ἂ δὲ **ΟΡ** ἕξ, ἂ δὲ **ΑΟ** ἐννέα, ἂ δὲ **ΓΑ** ἐννεακαίδεκα. Ἔστι δὲ ἂ **ΡΟ** τῇ **ΕΖ** ἴσα · ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἂ **ΑΓ** ποτὶ τὰν **ΕΖ**, ὃν ἔχει τὰ ἐννεακαίδεκα ποτὶ τὰ ἕξ · καὶ ἐστὶν ἂ **ΑΓ** διάμετρος ἀμικυκλίου τοῦ **ΑΒΓ**, ἂ δὲ **ΕΖ** κύκλου τοῦ **ΕΒΖ** · εὐρέθη ἄρα ὁ αἰτούμενος λόγος. Ὅμοίως δὴ δειχθήσεται εἶ καὶ ὁ λόγος τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἀμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου ἐπιμόριος ᾗ.

7.

Si on circonscrit à un carré un cercle et si on y inscrit un autre cercle, le cercle circonscrit sera équivalent au double du cercle inscrit.

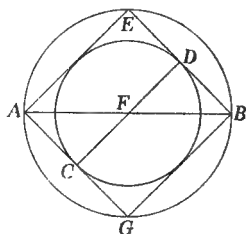


Fig. 141

Soit donc AB le cercle comprenant en lui le carré AB , et CD le cercle inscrit ; soit AB la diagonale du carré et le diamètre du cercle circonscrit ; menons dans le cercle inscrit un diamètre CD parallèle au côté AE qui lui est égal. Comme le carré sur AB est équivalent au double¹ du carré sur AE , c'est-à-dire du carré sur DC , et que le rapport des carrés sur les diamètres des cercles

1. Cf. Eucl. I, 47.

7.

ζ'.

Si circulus circa quadratum descriptus fuerit, et alius intra illum, utique erit circumscriptus duplus inscripti.

Ὁ τετραγώνῳ περιγεγραμμένος κύκλος διπλασίῳ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστίν.

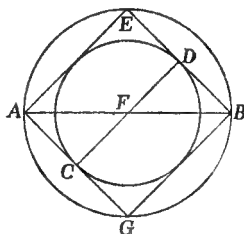


Fig. 141

Sit itaque circulus comprehendens quadratum AB circulus AB et inscriptus CD, et sit diameter quadrati AB, et est diameter circuli circumscripti, et educamus CD diametrum circuli inscripti parallelam ipsi AE, quae est ei aequalis. Et quia quadratum AB duplum est quadrati AE sive DC, et proportio quadratorum ex diametris circularum est

Ἐστω γὰρ κύκλος ὁ AB περὶ τετράγωνον τὸ AB καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένος κύκλος ὁ ΓΔ, διάμετρος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου ἡ AB, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἡ ΓΔ παρὰ τὰν AE · φανὶ δὴ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ διπλασίῳ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς AB διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς AE, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οἱ κύκλοι δὲ ἐντι ὡς τὰ

est égal au rapport des cercles¹, le cercle de diamètre AB est équivalent au double du cercle de diamètre CD, ce que nous avons voulu démontrer.

8.

Si on prolonge une corde quelconque AB d'un cercle, si on porte sur le prolongement un segment de droite BC égal au rayon du cercle, si on joint C au centre D du cercle par la droite CD et qu'on prolonge CD jusqu'au point E (sc. du cercle), l'arc AE sera triple de l'arc BF.

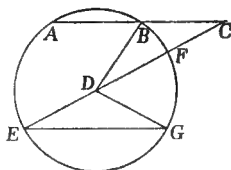


Fig. 142

Menons la parallèle EG à AB et les droites DB et DG. Comme les deux angles DEG et DGE sont égaux, l'angle GDC sera double² de l'angle DEG. D'autre

1. Cf. Eucl. XII, 2.

2. Cf. Eucl. I, 32.

eadem proportioni circuli ad circulum, igitur circulus AB duplus est circuli CD. Et hoc est quod uoluimus.

ἀπὸ τῶν διαμέτρων αὐτῶν τετράγωνα, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλασίων· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

8.

η'.

Si egrediatur in circulo linea AB ubicunque et producat in directum, et ponatur BC aequalis semidiametro circuli, et iungatur ex C ad centrum circuli, quod est D, et producat ad E, erit arcus AE triplus arcus BF.

Εἴ κα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις AB προσαρμοσμένα ἤ, ἐκβληθῇ δὲ κατὰ τὸ Γ σαμεῖον, ὥστε τὰν ΒΓ εὐθεῖαν τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν εἶμεν, διαχθῇ δὲ εὐθεῖά τις ἀπὸ τοῦ Γ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ Ε σαμεῖον, ἐσσεῖται περιφέρεια ἡ ΑΕ περιφερείας τῆς ΒΖ τριπλασίων.

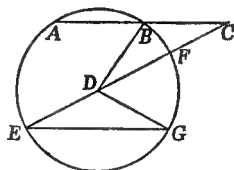


Fig. 142

Educamus igitur EG parallelam ipsi AB, et iungamus DB, DG, et quia duo anguli DEG, DGE sunt aequales, erit angulus GDC duplus anguli DEG. Et quia angulus

Ἄχθω γὰρ ἡ ΕΗ παρὰ τὰν ΑΒ καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΔΒ, ΔΗ. Ἐπεὶ οὖν γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΓΔ, ΒΔΓ, ΔΕΗ, ΔΗΕ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΓΔΗ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶ διπλα-

part, l'angle BDC étant égal à l'angle BCD et l'angle CEG égal¹ à l'angle ACE, l'angle GDC sera double de l'angle CDB, l'angle entier BDG sera triple de l'angle BDC, et l'arc BG, qui est égal à l'arc AE, sera triple² de l'arc BF, ce que nous avons voulu démontrer.

9.

Si dans un cercle deux cordes AB et CD ne passant pas par le centre se coupent à angle droit, la somme des deux arcs AD et CB est égale à la somme des deux arcs AC et DB.

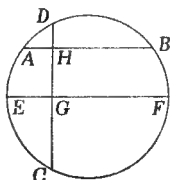


Fig. 143

Menons le diamètre EF parallèle à AB ; soit G le point où ce diamètre divise CD en deux parties égales ; EC sera alors égal³ à ED. Puisque les deux

1. Cf. Eucl. I, 29.

2. Cf. Eucl. III, 26.

3. Cf. Eucl. III, 3.

BDC aequalis est angulo BCD, et angulus CEG aequalis est angulo ACE, erit angulus GDC duplus anguli CDB et totus angulus BDG triplus anguli BDC, et arcus BG aequalis arcui AE triplus est arcus BF. Et hoc est quod uolumus.

σίων, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἂ ὑπὸ ΒΔΗ γωνίας τᾶς ὑπὸ ΒΔΓ τριπλασίων. Ἐσσεῖται ἄρα περιφέρεια ἂ ΒΗ, τουτέστιν ἂ ΑΕ, περιφερείας τᾶς ΒΖ τριπλασίων · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

9.

θ'.

Si mutuo se secuerint in circulo duae lineae AB, CD (sed non in centro) ad angulos rectos, utique duo arcus AD, CB sunt aequales duobus arcibus AC, DB.

Εἷ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωντι ἀλλήλας ποτ' ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι, δύο αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον ἴσαι ἀλλήλαις ἐντί.

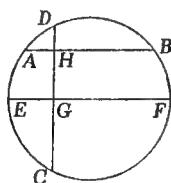


Fig. 143

Educamus diametrum EF parallelam ipsi AB, quae secet CD bifariam in G; erit EC aequalis ipsi ED. Et quia tam

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τέμνουσαι ἀλλήλας ποτ' ὀρθὰς, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι · φημι δὴ, δύο αἱ

arcs EDF et ECF sont des demi-circonférences, et que l'arc ED est égal à la somme des arcs EA et AD, la somme des arcs CF, EA et AD sera égale à une demi-circonférence. Or l'arc EA est égal à l'arc BF ; il s'ensuit que la somme des arcs CB et AD est égale à une demi-circonférence. Par conséquent, la somme des deux arcs EC et EA, c'est-à-dire l'arc AC, augmentée de l'arc DB, sera égale à une demi-circonférence, et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

10.

Soit un cercle ABC, DA et DC deux tangentes et DB une sécante de ce cercle ; si on mène la parallèle CE à DB et la corde EA, coupant DB en F et qu'on abaisse de F

arcus EDF quam ECF est semicirculus, et arcus ED aequalis arcui EA cum arcu AD, erit arcus CF cum duobus arcubus EA, AD aequalis semicirculo. Et arcus EA aequalis arcui BF ; ergo arcus CB cum arcu AD aequalis est semicirculo. Et remanent duo arcus EC, EA, nempe arcus AC, cum arcu DB aequales illi. Et hoc est quod uolumus.

ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΑΔ, ΓΒ δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον ταῖς ΑΓ, ΒΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Τετμάσθω γὰρ δίχα ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Η σαμεῖον καὶ διὰ τοῦ Η διάχθω διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ ΕΖ παρὰ τὰν ΑΒ.

Ἐπεὶ οὖν περιφέρεια ἡ ΕΓ περιφερείαις ταῖς ΕΑ, ΑΔ ἴσα ἐστίν, ἐσσοῦνται ἄρα περιφέρειαι αἱ ΓΖ, ΕΑ, ΑΔ ἀμικυκλίῳ ἴσαι · ἐστὶ δὲ περιφέρεια ἡ ΕΑ περιφερεία τῇ ΒΖ ἴσα · συναμφότερος ἄρα περιφέρεια ἡ ΓΒ, ΑΔ ἀμικυκλίῳ ἐστὶν ἴσα · λοιπὴ ἄρα περιφέρεια ἡ ΑΓ, ΔΒ ἀμικυκλίῳ ἐστὶν ἴσα · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

10.

ι'.

Si fuerit circulus ABC et DA tangens illum et DB secans illum et DC etiam tangens, et educta fuerit CE parallela ipsi DB, et iuncta fuerit EA secans DB in F, et educta fuerit ex F perpendiculara-

Εἴ καὶ ἡ κύκλος καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΓ ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ Α, Γ σαμεῖα, τέμνουσα δὲ εὐθεῖα ἡ ΔΒ, ἀχθῇ δὲ ἡ ΕΓ παρὰ τὰν ΒΔ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ ΕΑ τέμνουσα τὰν ΔΒ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ποτ'

la perpendiculaire FG sur CE, cette perpendiculaire divisera CE en deux parties égales au point G.

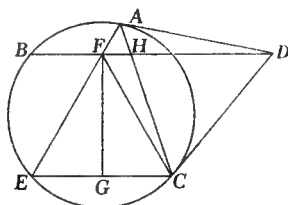


Fig. 144

Menons AC ; comme DA est une tangente et AC une sécante du cercle, l'angle DAC sera égal à l'angle inscrit dans le segment alterne¹ (sc. complémentaire) du segment AC, c'est-à-dire à l'angle AEC. Or l'angle AEC est égal à l'angle AFD, parce que CE et BD sont parallèles² ; il s'ensuit que les angles DAC et AFD sont égaux. De plus, dans les deux triangles DAF et AHD les deux angles AFD et HAD sont égaux, et l'angle de sommet D leur est commun, d'où il suit que le rectangle de côtés FD et DH est équivalent³ au carré sur DA et, partant, au carré sur DC. Et comme le rapport de FD à DC est égal⁴ au rapport de CD à DH, et que l'angle de sommet D leur est commun, les

1. Cf. Eucl. III, 32.

2. Cf. Eucl. I, 29.

3. Parce que, les deux triangles ADH et ADF étant semblables,
 $\frac{FD}{DA} = \frac{DA}{DH}$, d'où $DA^2 = FD \cdot DH$.

4. Cf. Eucl. VI, 17.

ris FG super CE, utique ὀρθὰς τῇ ΕΓ ἀχθῇ ἃ ΖΗ, ἃ
bifariam secabit illam in ἀγμένα τὰν ΕΓ δίχα τέμνει.
G.

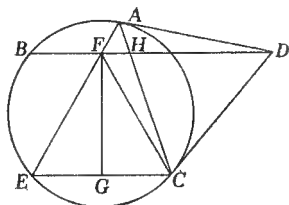


Fig. 144

lungamus AC. Et quia
DA est tangens et AC
secans circulum, erit
angulus DAC aequalis
angulo cadenti in alterno
segmento AC, nempe an-
gulo AEC. Et est aequalis
angulo AFD, eo quod
CE, BD sunt parallelae;
ergo anguli DAC, AFD
sunt aequales. Et in duo-
bus triangulis DAF, AHD
sunt duo anguli AFD,
HAD aequales, et an-
gulus D communis;
propterea erit rectangu-
lum FD in DH aequale
quadrato DA, immo qua-
drato DC. Et quia
proportio FD ad DC est
eadem proportioni CD
ad DH, et angulus D

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἃ ΑΓ.
Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἃ ΔΑ
ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου
ἐστίν, ἃ δὲ ΑΓ τέμνουσα
αὐτόν, γωνία ἃ ὑπὸ ΔΑΓ
τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι
τοῦ κύκλου γωνία τῇ ὑπὸ
ΑΕΓ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΑΖΔ,
ἐστὶν ἴσα. Ἐστὶ γὰρ ἃ ΓΕ
παρὰ τὰν ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐν
δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΔΑΖ,
ΑΘΔ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ
ΑΖΔ, ΘΑΔ ἴσαι ἀλλάλαις
ἐντί, γωνία δὲ ἃ πρὸς τῷ Δ
κοινά, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΔ,
ΔΘ περιεχόμενον ὀρθογώ-
νιον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ, του-
τέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετρα-
γώνῳ, ἐστὶν ἴσον· ἐπεὶ οὖν
ὄν λόγον ἔχει ἃ ΖΔ ποτὶ
τὰν ΔΓ, τοῦτον ἔχει καὶ
ἃ ΔΓ ποτὶ τὰν ΔΘ, γωνία

triangles DFC et DCH sont semblables¹ et l'angle DFC est égal à l'angle DCH, lui-même égal à l'angle DAH. Or l'angle DAH est égal à l'angle AFD ; il s'ensuit que les deux angles AFD et CFD sont égaux. Mais l'angle DFC est égal² à l'angle FCE, et l'angle DFA est égal à l'angle AEC ; par conséquent, dans le triangle FEC les deux angles de sommets C et E sont égaux, les deux angles de sommet G sont droits, et le côté GF est commun (sc. aux triangles FEG et FCG), d'où il suit que CG est égal³ à GE. La corde CE est donc divisée en deux parties égales au point G, ce que nous avons voulu démontrer.

11.

Si dans un cercle deux cordes AB et CD se coupent à angle droit en un point E différent du centre, la somme des carrés sur AE, BE, EC et ED est équivalente au carré sur le diamètre.

Menons le diamètre AF et les droites AC, AD, CF et DB. Comme l'angle AED est droit, il sera égal⁴ à l'angle

1. Cf. Eucl. VI, .

2. Cf. Eucl. I, 29.

3. Cf. Eucl. I, 26.

4. Cf. Eucl. III, 31.

communis, erunt trian-
gula DFC, DCA similia,
et angulus DFC aequalis
DCH, qui aequalis est
angulo DAH. Et hic est
aequalis angulo AFD ;
ergo duo anguli AFD,
CFD sunt aequales. Et
DFC aequalis angulo
FCE ; et erat DFA aequa-
lis angulo AEC ; ergo in
triangulo FEC sunt duo
anguli C, E aequales et
duo anguli G recti et
latus GF commune ;
propterea erit CG aequa-
lis ipsi GE. Ergo CE
bifariam secatur in G. Et
hoc est quod uoluimus.

δὲ ἂ ποτὶ τὸ Δ σαμεῖον
κοινὰ ἐστίν, τρίγωνα ἄρα
τὰ ΔΖΓ, ΔΓΘ ἐστὶν ὁμοια
καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΖΓ,
ΔΓΘ, ΔΑΘ, ΑΖΔ ἴσαι ἀλλά-
λαις ἐντί · ἔστι δὲ καὶ γωνία
ἂ ὑπὸ ΔΖΓ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ
ἴσα · ἦν δὲ καὶ ἂ ὑπὸ ΔΖΑ
τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἴσα · ἐν δυσὶ
τριγώνοις ἄρα τοῖς ΕΗΖ,
ΓΗΖ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ
ΗΕΖ, ΗΓΖ ἴσαι ἀλλάλαις
ἐντί καὶ αἱ ποτὶ τῷ Η
σαμεῖω γωνίαι ὀρθαί · ἔστι
δὲ πλευρὰ ἂ ΗΖ κοινὰ ·
ἔστιν ἄρα ἂ ΕΗ τῇ ΗΓ ἴσα ·
δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

II.

ια'.

Si mutuo se secuerint
in circulo duae lineae AB,
CD ad angulos rectos in
E, quod non sit in centro,
utique omnia quadrata
AE, BE, EC, ED aequalia
sunt quadrato diametri.

Educamus diametrum
AF, et iungamus lineas

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο
εὐθεῖαι τέμνωντι ἀλλάλας
ποτ' ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ
κέντρου οὔσαι, τὰ ἀπὸ
τῶν τραμάτων τῶν εὐθειῶν
τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς δια-
μέτρου τοῦ κύκλου ἴσα
ἐντί.

Ἐστω γὰρ κύκλος ὁ ΑΒΓ,
καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ
τετμάσθων ποτ' ὀρθὰς κατὰ

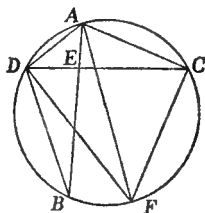


Fig. 145

ACF. Or l'angle ADC est égal à l'angle AFC comme s'appuyant¹ sur le même arc AC ; il s'ensuit que dans les deux triangles ADE et AFC les deux angles CAF et DAE sont égaux ; de même les deux arcs CF et DB seront égaux², et par conséquent les cordes qui les sous-tendent sont aussi égales³. Or la somme des deux carrés sur DE et sur EB est équivalente au carré sur BD, c'est-à-dire au carré sur CF, la somme des deux carrés sur AE et sur EC est équivalente au carré sur CA,

1. Cf. Eucl. III, 27.

2. Cf. Eucl. III, 26.

3. Cf. Eucl. III, 29.

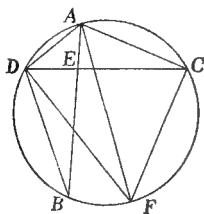


Fig. 145

AC, AD, CF, DB. Et quia
 angulus AED est rectus,
 erit aequalis angulo ACF.
 Et angulus ADC aequalis
 AFC, eo quod sunt super
 arcum AC ; et remanent
 in duobus triangulis ADE,
 AFC duo anguli CAF,
 DAE aequales ; erunt
 pariter duo arcus CF,
 DB aequales, immo et
 duae chordae eorum
 aequales. Et duo qua-
 drata DE, EB aequantur
 quadrato BD, nempe CF,
 et duo quadrata AE, EC
 aequantur quadrato CA,

τὸ Ε σημείον · φαμὶ δὴ, τὰ
 ἀπὸ τῶν τραμάτων τῶν ΑΕ,
 ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ τετράγωνα τῷ
 ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ
 κύκλου ἴσα ἐστίν.

Ἄχθω γὰρ διάμετρος τοῦ
 κύκλου ἡ ΑΖ καὶ ἐπεζεύχ-
 θων αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΓΖ, ΔΒ
 εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν ἐν δυοῖ
 τριγώνοις τοῖς ΑΔΕ, ΑΖΓ
 γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΕΔ, ΑΔΕ,
 καὶ ΑΓΖ, ΑΖΓ ἴσαι ἀλλά-
 λαις ἐντὶ ἑκατέρα ἑκατέρα,
 λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ
 ΓΑΖ, ΔΑΕ ἐσσοῦνται ἀλλά-
 λαις ἴσαι · περιφέρειαι ἄρα
 αἱ ΓΖ, ΔΒ ἴσαι ἀλλάλαις
 ἐντί, καὶ αἱ ταύτας ὑποτεί-
 νουσιν εὐθεῖαι αἱ ΓΖ, ΔΒ ·
 ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΕ,
 ΕΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΒ, τουτέστι
 τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΖ, ἴσον, καὶ
 τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ τῷ
 ἀπὸ τᾶς ΓΑ, καὶ τὰ ἀπὸ

et la somme des deux carrés sur CF et sur CA est équivalente au carré sur FA , c'est-à-dire sur le diamètre. Par conséquent, la somme des carrés sur AE , sur EB , sur CE et sur ED est équivalente au carré sur le diamètre, ce que nous avons voulu démontrer.

12.

Soit un demi-cercle de diamètre AB et deux droites issues d'un point C et tangentes au demi-cercle aux

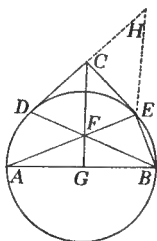


Fig. 146

deux points D et E ; si on mène EA et DB , qui se coupent en F , et CF et qu'on prolonge CF jusqu'au point G , CG sera perpendiculaire à AB .

et duo quadrata CF, CA
aequantur quadrato FA,
nempe diametri ; igitur
quadrata AE, EB, CE,
ED omnia sunt aequalia
quadrato diametri. Et hoc
est quod uoluimus.

τῶν ΓΖ, ΓΑ τῷ ἀπὸ τῆς
ΖΑ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς
διαμέτρου, ἴσα ἔσσοῦνται
ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων
τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ τετρά-
γωνα τῷ ἀπὸ τῆς διαμέτρου
ἴσα δέδεικται οὖν τὸ προ-
τεθέν.

12.

ιβ'.

Si fuerit semicirculus
super diametrum AB, et
eductae fuerint ex C duae
lineae tangentes illum in
duobus punctis D, E, et

Εἴ κα ἕκ σαμείου ἐκτὸς
ἀμικυκλίου δύο εὐθεῖαι
ἀχθέωντι ἐπιψαύουσαι αὐ-
τοῦ, ἀχθέωντι δὲ ἐκ τῶν
σαμείων ἀφ᾽ ἑαυτῶν δύο εὐθεῖαι

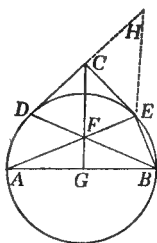


Fig. 146

iunctae fuerint EA, DB se
mutuo secantes in F, et
iuncta fuerit CF et pro-
ducatur ad G, erit CG
perpendicularis ad AB.

ποτὶ τὰ ἀπεναντίον πέρατα
τῆς διαμέτρου τέμνουσαι
ἀλλάλας, ἃ ἐκ τοῦ ἐκτὸς
σαμείου ποτὶ τὸ σαμεῖον
τομᾶς τῶν δύο εὐθειῶν
ἀχθεῖσα καὶ ἐκβληθεῖσα
ποτὶ τὴν διάμετρον ἔσσειται
ταῦτα ποτ' ὀρθάς.

Menons DA et EB. L'angle BDA étant droit¹, les deux autres angles DAB et DBA du triangle DAB ont pour somme un angle droit, et comme l'angle AEB est droit, cette somme lui est égale. Ajoutons de part et d'autre l'angle FBE ; la somme des deux angles DAB et ABE est égale à la somme des angles FBE et FEB, c'est-à-dire à l'angle externe² DFE du triangle FBE. D'autre part, puisque CD est une tangente au cercle et que DB en est une sécante, l'angle CDB est égal à l'angle DAB, et, de même, l'angle CEF est égal³ à l'angle EBA, d'où il suit que la somme des deux angles CEF et CDF est égale à l'angle DFE. Or il ressort de notre traité *Des figures quadrilatères*⁴ que si, entre deux droites égales se rencontrant en

1. Cf. Eucl. III, 31.

2. Cf. Eucl. I, 32.

3. Cf. Eucl. III, 32.

4. Seul endroit où un tel traité soit attribué à Archimède.

lungamus DA, EB. Et quia angulus BDA est rectus, erunt duo anguli DAB, DBA reliqui in triangulo DAB aequales uni recto. Et angulus AEB rectus; igitur sunt aequales ei. Et ponamus angulum FBE communem; ambo anguli DAB, ABE sunt aequales FBE, FEB, immo angulo DFE externo in FBE. Et quia CD est tangens circulum et DB secans illum, angulus CDB aequatur angulo DAB, et pariter angulus CEF aequatur angulo EBA; ergo duo anguli CEF, CDF simul aequales sunt angulo DFE. Et iam quidem planum fit ex nostro tractatu de figuris quadrilateris quod, si educantur inter duas lineas aequales sibi occurrentes in aliquo

Ἔστω ἀμικύκλιον τὸ AB, σαμεῖον δέ τι ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ Γ, καὶ ἐκ τοῦ Γ ἄχθων δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐπιψάουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ Δ, Ε σαμεῖα, ἐπεξεύχθων δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἀφ᾽ ὧν ποτὶ τὰ ἀπεναντίον πέρατα τᾶς διαμέτρου τὰ Α, Β εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΔΒ τέμνουσαι ἀλλάλας κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἄχθεισα ἡ ΓΖ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η σαμεῖον· φημὶ δὴ, εὐθεῖα ἡ ΓΗ διαμέτρῳ τῇ AB ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς.

Ἐπεξεύχθων γὰρ αἱ ΑΔ, ΕΒ. Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΑΒ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ ὀρθά ἐστίν, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΒ, ΔΒΑ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσα· κοινὰ ποτικείσθω ἡ ὑπὸ ΖΒΕ· συναμφότερος ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΒ, ΑΒΕ συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ ΖΒΕ, ΖΕΒ, τουτέστιν ἐξωτερικῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΓΔ ἐπιψάουσα τοῦ κύκλου ἐστίν, διᾱκται δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἀφ᾽ ὧν τοῦ Δ ἡ

un point, comme les deux droites CD et CE, on mène deux droites se coupant, comme les deux droites DF et EF, et si l'angle compris entre elles, comme l'angle F, est égal à la somme des deux angles qui sont produits par l'intersection des deux droites, comme la somme des deux angles E et D, le segment de droite compris entre le point de concours et le point d'intersection, comme le segment de droite CF, est égal à chacune des droites concourantes¹, comme CD ou CE ; CF sera donc égal à CD, d'où il suit que l'angle CFD est égal à l'angle CDF, c'est-à-dire à l'angle DAG. Mais la somme des angles CFD et DFG est égale à un angle bidroit ; la somme des angles DAG et DFG est donc

1. Dans son édition (cf. l'Introduction), p. 405, Borelli démontre cette proposition de la manière que voici : puisque l'angle H est égal à l'angle CEH et que l'angle DFE est égal à la somme des angles CDF et CEF, la somme des angles DFE et H est égale à la somme des angles CDF et FEH et égale à un angle bidroit, d'où il suit que le quadrilatère DFEH est inscriptible dans un cercle (cf. Eucl. III, 22). Le centre de ce cercle sera le point C, du moment que $CH = DC = CE$; il s'ensuit que $CF = CD$.

Avant Borelli, le commentateur arabe Almoctasso-Abul-Hassan avait proposé une démonstration apagogique de ce même théorème.

puncto, uti sunt duae lineae CD, CE, duae lineae se mutuo secantes, uti sunt duae lineae DF, EF, et fuerit angulus ab illis contentus, ut est angulus F, aequalis duobus angulis, qui occurrunt duabus lineis se inuicem secantibus, uti sunt duo anguli E, D, simul, erit linea egrediens a puncto concursus ad punctum sectionis, uti est linea CF, aequalis cuilibet linearum sibi occurrentium, ut CD uel CE ; propterea erit CF aequalis ipsi CD ; ergo angulus CFD est aequalis angulo CDF, nempe angulo DAG. Sed angulus CFD cum angulo DFG est aequalis duobus rectis ; ergo angulus DAG cum angulo DFG aequa-

ΔΒ τέμνουσα τὸν κύκλον, ἐσσεῖται γωνία ἁ ὑπὸ ΓΔΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΑΒ ἴσα · διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστὶν ἴσα · καὶ συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΓΕΖ, ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴσα · καὶ δέδεικται παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τετραπλεύρων ὅτι εἴ κα μετὰ δύο ἴσῃν εὐθειῶν τεμνομένων, οἷον τὰν ΓΔ, ΓΕ, δύο εὐθεῖαι ἀχθέωνται τεμνόμεναι, οἷον αἱ ΔΖ, ΕΖ, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ τούτων περιεχομένη, ὡς ἁ ποτὶ τῷ Ζ, συναμφοτέρῃ τῇ ὑπὸ τῶν δύο τεμνομένων εὐθειῶν περιεχομένη, ὡς αἱ ποτὶ τοῖς Ε, Δ σαμείοις, ἴσα ἐστὶν, ἁ ἐπιζευγνυμένα ἐκ τοῦ σαμείου καθ' ὃ αἱ δύο εὐθεῖαι συμβάλλοντι ἐπὶ τὸ σαμεῖον καθ' ὃ αὐται τέμνοντι ἀλλάλας, ὡς ἁ ΓΖ εὐθεῖα, ἐκατέρῃ τὰν τεμνομένων εὐθειῶν, ὡς αἱ ΓΔ, ΓΕ, ἐστὶν ἴσα · ἁ ΓΖ εὐθεῖα ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴσα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΔΑΗ · γωνίαι δὲ αἱ ὑπὸ

aussi égale à un angle bidroit, d'où il suit que dans le quadrilatère ADFG les deux angles ADF et AGF ont une somme égale à un angle bidroit. Mais l'angle ADB est droit ; par conséquent l'angle AGC est droit, et CG est perpendiculaire à AB, et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

13.

Si deux droites AB et CD se coupent à l'intérieur d'un cercle, AB étant un diamètre et CD une corde quelconque de ce cercle, et si on abaisse des deux points A et B les deux perpendiculaires AE et BF sur CD, ces perpendiculaires découperont sur la corde CD deux segments CF et DE égaux entre eux¹.

Menons EB, abaissons du centre I du cercle la perpendiculaire IG sur CD et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre H avec EB. Comme IG est la perpendi-

1. Cf. Pappus VII, 132.

lis est duobus rectis ; et remanent in quadrilatero ADFG duo anguli ADF, AGF aequales duobus rectis. Set angulus ADB rectus est ; ergo angulus AGC est rectus et CG perpendicularis ad AB. Et hoc est quod uoluimus.

ΓΖΔ, ΔΖΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί · συναμφότερος ἄρα γωνία ἂ ὑπὸ ΔΑΗ, ΔΖΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα ἐστίν · λοιπαὶ ἄρα γωνίαι τετραπλεύρου τοῦ ΑΔΖΗ αἱ ὑπὸ ΑΔΖ, ΑΗΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί · ἔστι δὲ γωνία ἂ ὑπὸ ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσα · γωνία ἄρα ἂ ὑπὸ ΑΗΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσα ἐστίν · ἔστιν ἄρα εὐθεία ἂ ΔΗ διαμέτρῳ τῇ ΑΒ ποτ' ὀρθᾶς · δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

13.

ιγ'.

Si mutuo se secant duae lineae AB, CD in circulo, et fuerit AB diameter illius, at non CD, et educantur ex duobus punctis A, B duae perpendiculares ad CD, quae sint AE, BF, utique abscondent ex illa CF, DE aequales.

Iungamus EB et educamus ex I, quod est centrum, perpendicularem IG super CD et producamus eam ad H in EB. Et quia IG est

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλάλας μὴ ποτ' ὀρθὰς ὦσιν, ἂ μὲν διάμετρος ἂ δὲ οὐ, ἀχθέωντι δὲ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου εὐθεῖαι ποτ' ὀρθὰς τῇ ἄλλῃ εὐθείᾳ, αἱ ἀπολαφθεῖσαι ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλάλας μὴ ποτ' ὀρθὰς αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἃν ἂ ΑΒ διάμετρος τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου

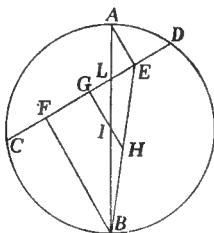


Fig. 147

culaire abaissée du centre sur CD , IG divisera CD en deux parties égales¹ au point G ; d'autre part, IG et AE , étant deux perpendiculaires à CD , seront parallèles², et comme BI est égal à IA , BH sera égal³ à HE ; et à cause de leur égalité, et parce que BF est parallèle à HG , FG sera égal à GE ; cette dernière égalité, jointe à l'égalité de GC et de GD , entraîne l'égalité de FC et de ED que nous avons voulu démontrer.

1. Cf. Eucl. III, 3.

2. Cf. Eucl. I, 28.

3. Cf. Eucl. VI, 2.

14.

Soit un demi-cercle de diamètre AB et deux segments de droite égaux AC et BD pris sur le diamètre AB ; si on décrit sur AC, CD et DB comme diamètres des demi-cercles, le centre commun des deux demi-cerlces sur AB et sur CD étant E, et qu'on prolonge la perpendiculaire EF sur AB jusqu'au point G, le cercle de diamètre FG est équivalent à l'aire comprise entre le grand demi-cercle, les deux demi-cercles qui lui sont intérieurs et le demi-cercle du milieu qui lui est extérieur. Cette aire est la figure appelée Salinon¹ par Archimède.

Puisque DC est divisé en deux parties égales par le point E et que CA est ajouté à DC, la somme des carrés sur DA et sur CA est égale² à la double somme des carrés sur DE et EA. Mais FG est égal à DA, d'où il suit que la somme des carrés sur FG et sur AC est

1. Différentes explications ont été proposées pour le sens et l'origine de ce mot. Barrow le fait dériver de *σελίον*, lunule, M. Cantor de *σάλος*, agitation d'une vague, Th. Heath du mot latin *salinum*, salière, et Heiberg de *σέλιον*, feuille d'ache.

2. Cf. Eucl. II, 10.

14.

Si fuerit AB semicirculus, et ex eius diametro AB dissectae sint AC, BD aequales, et efficiantur super lineas AC, CD, DB semicirculi, et sit centrum duorum semicirculorum AB, CD punctum E, et sit EF perpendicularis super AB et producat ad G, utique circulus, cuius diameter est FG, aequalis est superficiei contentae a semicirculo maiori et a duobus semicirculis, qui sunt intra illum, et a semicirculo medio, qui est extra illum. Et est figura, quam uocat Archimedes Salinon.

Quia DC bifariam secatur in E, et addita est illi CA, erunt duo quadrata DA, CA dupla duorum quadratorum DE, EA. Sed FG aequalis est ipsi DA ; ergo duo quadrata FG, AC dupla

ιβ'.

Εἴ κα ἐν ἀμικυκλίῳ ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου δύο ἴσα τμήματα λαμβέωντι καὶ ἀπὸ τούτων ἀμικύκλια ἐντὸς γραφέωντι, γραφῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς διαμέτρου ἀμικύκλιον ἐκτὸς, ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος συναμφοτέρος ἂ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἀμικυκλίου καὶ ἂ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐκτὸς, χωρὶς τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἀμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλεῖσθω, ἴσος ἐστίν.

Ἐστω ἀμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἂ AB, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου τῶν A, B δύο τμήματα ἴσα ἀλλάλοις λελάφθω τὰ AG, BD, γεγράφθω δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων δύο ἀμικύκλια ἐντὸς, καὶ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τοῦ ΓΔ γεγράφθω ἀμικύκλιον ἐκτὸς, διὰ κέντρου δὲ τοῦ ἀμικυκλίου τοῦ E διαμέτρῳ τῇ AB ἄχθω ποτ' ὀρθὰς εὐθεῖα ἂ EZ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ H σαμεῖον ' φημί δὴ, ὁ κύκλος,

égale à la double somme des carrés sur DE et sur EA. Comme, d'autre part, AB est double de AE et CD double de ED, la somme des carrés sur AB et sur DC sera

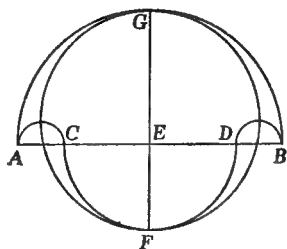


Fig. 148

quadruple de la somme des carrés sur DE et sur EA et, partant, égale à la double somme des carrés sur GF et sur AC. De même, la somme des deux cercles de diamètres AB et DC est égale à la double somme des cercles de diamètres GF et AC, et la demi-somme des cercles de diamètres AB et CD est égale à la somme des cercles de diamètres GF et AC. Mais le cercle de

sunt duorum quadrato-
rum DE, EA. Et quia AB
dupla est AE, et CD
dupla quoque ED, erunt
duo quadrata AB, DC

οὗ διάμετρος ἡ ΖΗ, χωρίῳ
τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν
περιφερειῶν τῶν ἀμικυ-
κλίων, ὅπερ σελήνιον κα-
λείσθω, ἴσος ἐστίν.

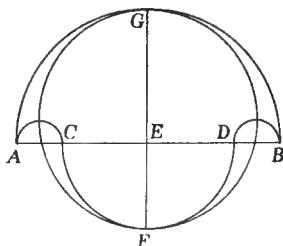


Fig. 148

quadrupla duorum qua-
dratorum DE, EA, immo
dupla duorum quadrato-
rum GF, AC. Similiter
etiam duo circuli, quo-
rum diametri sunt AB,
DC, dupli sunt eorum,
quorum diametri sunt
GF, AC, et dimidii eorum,
quorum diametri sunt
AB, CD, aequales duobus

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὰ
ἡ ΔΓ δίχα τέτμεται κατὰ
τὸ Ε σαμεῖον, ποτίκειται
δὲ αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας
ἡ ΓΑ, τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ καὶ
τὸ ἀπὸ τῆς ποτικειμένης
τῆς ΓΑ τὰ συναμφότερα
τετράγωνα διπλασίονά ἐντι
τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἀμισείας τῆς
ΔΕ καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΑ
τετραγώνου. Ἔστι δὲ ἡ ΖΗ
τῇ ΔΑ ἴσα· ἔστιν ἄρα
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΓΑ
διπλασίονα τοῦ τε ἀπὸ τῆς
ΔΕ καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΑ.
Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ
διπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ΓΔ

diamètre AC est égal à la somme des deux demi-cercles sur AC et sur BD ; si nous retranchons donc de part et d'autre des cercles indiqués les deux demi-cercles sur AC et sur BC qui sont en commun, il reste la figure comprise entre les quatre demi-cercles de diamètres AB, CD, DB et AC (appelée Salinon par Archimède), équivalente au cercle de diamètre FG. Et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

15.

Soit un demi-cercle de diamètre AB, AC une corde égale au côté du pentagone (sc. régulier inscrit dans le cercle entier), AD la moitié de l'arc AC ; menons CD, prolongeons cette corde jusqu'à E, menons DB coupant

circulis, quorum diametri sunt GF, AC. Sed circulus, cuius diameter AC, est aequalis duobus semicirculis AC, BD ; ergo, si auferamus ex illis duos semicirculos AC, BD, qui sunt communes, remanet figura contenta a quatuor semicirculis AB, CD, DB, AC, (quae ea est, quam uocat Archimedes Salinon) aequalis circulo, cuius diameter est FG. Et hoc est quod uoluimus.

τῆς ΔΕ, ἐσσεῖται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ τετραπλασίονα, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΓΑ διπλασίονα · κύκλοι ἄρα, ὧν διαμέτροι αἱ ΑΒ, ΔΓ εὐθεῖαι, κύκλων, ὧν διαμέτροι αἱ ΖΗ, ΓΑ, διπλασίονές ἐντι · ἀμικύκλια ἄρα, ὧν διαμέτροι αἱ ΑΒ, ΔΓ εὐθεῖαι, κύκλοις, ὧν διαμέτροι αἱ ΖΗ, ΓΑ, ἴσα ἐστίν · κοινὸν ἀφαιρήσθω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΓ, τουτέστι δύο ἀμικύκλια, ὧν διαμέτροι αἱ ΑΓ, ΔΒ · λοιπὸν ἄρα χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἀμικυκλίων περιεχόμενον, ὅπερ σελήνιον καλεῖται, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΖΗ, ἴσον ἐστίν · δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

15.

ιε'.

Si fuerit AB semicirculus et AC chorda pentagoni, et semissis arcus AC sit AD, iungatur CD et producatur, ut cadat super E, et

Ἐστω ἀμικύκλιον τὸ ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου, τετράσθω δὲ περιφέρεια ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ

CA en F, et abaissons de F la perpendiculaire FG sur AB ; le segment de droite EG sera alors égal au rayon du cercle¹.

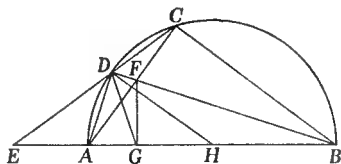


Fig. 149

Soit donc H le centre (sc. du demi-cercle) ; menons CB, HD, DG et AD. Comme l'angle ABC, ayant pour base le côté du pentagone, est égal aux deux cinquièmes d'un angle droit², chacun des deux angles CBD et DBA est égal à la cinquième partie d'un angle droit. Or l'angle DHA est double³ de l'angle DBH, d'où il suit que l'angle DHA est égal aux deux cinquièmes d'un

1. Cf. Pappus V, 77.

2. Cf. Eucl. III, 20.

3. Cf. Eucl. III, 20.

iungatur DB, quae secet
CA in F, et ducatur ex
F perpendicularis FG su-
per AB, erit linea EG
aequalis semidiametro
circuli.

ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου διάχθω
ἡ ΔΒ τέμνουσα πλευρὰν
τὴν ΑΓ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ
τοῦ Ζ ἄχθω τῇ ΑΒ ποτ'
ὀρθᾶς ἡ ΖΗ· φημι δὴ,
εὐθεῖα ἡ ΕΗ τῇ ἐκ τοῦ
κέντρου τοῦ κύκλου ἴσα
ἐστίν.

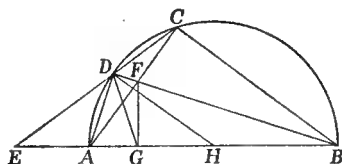


Fig. 149

iungamus itaque li-
neam CB, et sit centrum
H, et iungamus HD, DG
et AD. Et quia angulus
ABC, cuius basis est latus
pentagoni, est duae quin-
tae partes recti, quilibet
duorum angulorum CBD,
DBA est quinta pars recti.
Et angulus DHA duplus
est anguli DBH; ergo
angulus DHA est duae

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ ΓΒ,
καὶ ἔστω κέντρον τοῦ κύ-
κλου τὸ Θ σαμεῖον, καὶ
ἄχθωσαν αἱ ΘΔ, ΔΗ, ΑΔ
εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν γωνία ἡ
ὑπὸ ΑΒΓ δύο πέμπτα ὀρθᾶς
ἐστίν, γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΔ,
τουτέστι ἡ ὑπὸ ΔΒΑ, ἐν
πεμπταμόριον ὀρθᾶς ἐστίν·
γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΘΑ δύο
πέμπτα ὀρθᾶς ἐστίν. Καὶ
ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς
ΓΒΖ, ΗΒΖ δύο γωνίαι αἱ
ποτὶ τῇ Β ἴσαι ἀλλάλαις
ἐντί, ὀρθαὶ δὲ αἱ ποτὶ τὰ Η,
Γ σαμεῖα, κοινὰ δὲ πλευρὰ
ἡ ΒΖ, ἐσσεῖται ἄρα καὶ

angle droit. Puisque, de plus, dans les deux triangles CBF et GBF, les deux angles de sommet B sont égaux, que les angles de sommets G et C sont droits, et que le côté FB leur est commun, BC sera égal¹ à BG ; et comme dans les deux triangles CBD et GBD les deux côtés CB et BG sont égaux, les deux angles de sommet B égaux et le côté BD en commun, les deux angles BCD et BGD seront égaux². En outre, chacun d'eux est égal aux six cinquièmes³ d'un angle droit, et égal à l'angle externe DAE du quadrilatère BADG, qui est inscriptible dans un cercle⁴ ; il s'ensuit donc que l'angle DAB est égal à l'angle DGA, et DA sera égal à DG. Comme l'angle DHG est égal aux deux cinquièmes, et l'angle DGH égal aux six cinquièmes d'un angle droit, l'angle HDG est égal aux deux cinquièmes d'un angle droit, et DG sera égal à GH. L'angle ADE étant angle externe

1. Cf. Eucl. I, 26.

2. Cf. Eucl. I, 4.

3. Parce, d'après Eucl. III, 20, l'angle DCA est égal à la moitié de l'angle DHA, et que l'angle FCB est droit.

4. Parce que chacune des deux sommes, angle BCH + angle DAB, et angle DAE + angle DAB, est égale à un angle bidroit ; cf. Eucl. III, 22.

du quadrilatère ADCB inscriptible dans un cercle, il est égal à l'angle CBA, égal aux deux cinquièmes d'un angle droit et égal à l'angle GDH. Du moment, d'autre part, que dans les deux triangles EDA et HDG les deux angles EDA et HDG, ainsi que les deux angles DGH et DAE, sont égaux, et que les deux côtés DA et DG sont égaux, EA sera égal à HG ; ajoutons de part et d'autre AG ; EG sera alors égal¹ à AH, ce que nous avons voulu démontrer.

Il est évident, d'après ce qui précède, que DE est égal au rayon du cercle ; comme l'angle de sommet A (sc. l'angle DAE) est égal à l'angle DGH, DH sera égal² à DE. Je dis, de plus, que EC est divisé en moyenne et extrême raison³ par le point D, et que le plus grand segment partiel est DE, et cela parce que ED est la corde de l'hexagone⁴, et DC la corde du décagone ; cette propriété a déjà été démontré dans le livre des *Éléments*⁵, et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

1. Cf. Eucl. I, 26.

2. Parce que $DA = DG$ et $EA = GH$.

3. Cf. Eucl. VI, déf. 3.

4. Cf. Eucl. IV, 15.

5. Cf. Eucl. XIII, 9.

teri ADCB, quod est in circulo, est aequalis angulo CBA, et est duae quintae partes recti et aequalis angulo GDH. Et quia in duobus triangulis EDA, HDG sunt duo anguli EDA, HDG aequales et pariter duo anguli DGH, DAE et duo latera DA, DG, erit EA aequale HG. Et ponamus AG commune; erit EG aequale AH. Et hoc est quod uolumus.

Et hinc patet quod linea DE aequalis sit semidiametro circuli; quia angulus A aequalis est angulo DGH, ideo erit linea DH aequalis lineae DE.

Et dico quod EC diuiditur media et extrema proportionem in D, et maius segmentum est DE; et hoc, quia ED est chorda hexagoni et DC decagoni, et hoc iam demonstratum est in libro Elementorum. Et hoc est quod uolumus.

ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΕΔΑ, ΘΔΗ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΔΑ, ΔΑΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΘΔΗ, ΔΗΘ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴσαι ἐντί, βάσις δὲ ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΗ ἴσα, πλευρὰ ἄρα ἡ ΕΑ πλευρῇ τῇ ΘΗ ἴσα ἐστίν. Κοινὰ ποτικεῖσθω ἡ ΑΗ· εὐθεῖα ἄρα ἡ ΕΗ εὐθεῖα τῇ ΑΘ, τουτέστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἴσα ἐστίν· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δὴ φανερόν ὅτι εὐθεῖα ἡ ΔΕ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἴσα. Ἐπεὶ γὰρ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΗΘ ἴσα ἐστίν, ἐσσεῖται καὶ πλευρὰ ἡ ΔΘ πλευρῇ τῇ ΔΕ, τουτέστι τῇ ΑΘ, ἴσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ ἔτι δῆλον ὅτι εὐθεῖα ἡ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον τέτταται κατὰ τὸ Δ σαρμείον· τμᾶμα δὲ τὸ ΔΕ τὸ μείζον ἐστίν, ἐπεὶ ἡ ΕΔ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΔΓ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγραφομένων.

LE PROBLÈME DES BŒUFS

NOTICE

Le fond du problème traité dans cet opuscule peut être considéré comme étant d'Archimède lui-même. Dès l'antiquité, une scholie à la page 165 E du *Charmide* de Platon déclare que « le calcul arithmétique examine entre autres ce problème appelé problème des bœufs par Archimède », et Héron d'Alexandrie mentionne ce problème comme posé par Archimède¹. En revanche, la critique moderne est peu disposée² à attribuer à Archimède aussi la forme de l'énoncé du problème, une épigramme de vingt-deux distiques adressée, d'après l'en-tête du poème, aux géomètres d'Alexandrie. Mais l'idée d'une paternité d'Archimède paraît peut-être moins étrange quand on pense que les paysages de sa patrie, l'île de Thrinacie, où paissent les immenses troupeaux du dieu Hélios, venaient de devenir un des cadres de la poésie bucolique renouvelée. Pourquoi Archimède n'aurait-il pas eu l'humour de présenter son problème comme une « bucolique », au sens étymologique du terme, mise sous la forme d'une épigramme ?

Le problème en question devait non seulement défier la sagacité de ses correspondants d'Alexandrie ; il offre de sérieuses difficultés même à l'analyse moderne. Les effectifs des huit troupeaux de bœufs, quatre de taureaux et quatre de vaches, de quatre couleurs différentes, noir, blanc, jaune, bigarré, constituent en effet huit inconnues, alors que l'épigramme n'indique que sept relations numériques entre les troupeaux.

1. Cf. *Déf.*, IV, p. 98.

2. Cf. en particulier, B. Krumbiegel, *Das Problema bouinum des Archimedes*, Zeitschr. für Mathem. und Physik, XXV, 1880, Hist.-litter. Abteilung, p. 121-136.

Les nombres **cherchés** sont donc les solutions d'un système de sept équations avec huit inconnues. Ce système, « diophantique » avant le terme, ne pourra donc être résolu que par l'adjonction d'une condition supplémentaire, par l'introduction d'un paramètre dans le système des sept équations, et ce paramètre est lui-même soumis à deux conditions, — « diophantiques » elles aussi —, exprimées dans les vers 33 à 35 et 37 à 39, qui postulent que la somme $A+M$ des nombres des taureaux blancs et des taureaux noirs soit un nombre carré, et que la somme $P+X$ des nombres des taureaux bigarrés et des taureaux blonds soit un nombre triangulaire, c'est-à-dire, d'après l'arithmétique pythagoricienne, un nombre de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$.

L'épigramme ne contient aucune indication sur la manière dont Archimède a envisagé la solution du problème des bœufs, et la scholie à ce problème, du manuscrit de Wolfenbuettel, dont nous présentons le texte à la suite de l'épigramme, donne pour les huit inconnues des valeurs qui satisfont bien les sept équations dont il a été question plus haut, mais qui sont telles que la somme $A+M$ n'est pas un nombre carré, ni $P+X$ un nombre triangulaire. Il était réservé à l'algèbre du xix^e siècle, avec ses puissants moyens d'analyse, de résoudre le problème en tenant compte de la totalité des conditions. Parmi les savants qui ont étudié le problème des bœufs, citons G. Hermann¹, I. F. Wurm.², G. H. F. Nesselmann³, J. L. Heiberg⁴, A. Amthor⁵, M. Cantor⁶, P. Tannery⁷, Th. Heath⁸.

1. *De Archimedis problemate bouino*, dissert. Leipzig, 1828.

2. Dans *Jahns Jahrbücher*, XIV, p. 194.

3. Dans *Algebra der Griechen*, Berlin, 1842, p. 481 sq.

4. Dans *Quaestiones Archimedeae*, Copenhague, 1879, p. 66-69.

5. Dans *Zeitschr. für Math. und Physik*, XXV, 1880, p. 153-171.

6. *Ibid.*, XXIV, p. 169.

7. Dans *Mémoires de la Soc. des Sciences de Bordeaux*, 1880, III, p. 369 sq.

8. Dans *Diophantus of Alexandria*, 2^e éd. 1910, p. 142 sq.

On connaît jusqu'à présent deux manuscrits grecs contenant le *Problème des bœufs*, le *Guelferbytanus Gudianus Gr. 77*, sigle *G*, d'après lequel G. E. Lessing a établi le texte de son *editio princeps*, qui parut¹ en 1773, et le *Parisinus Gr. 2448*, xiv^e siècle, sigle *P*, consulté pour la première fois, pour le *Problème des bœufs*, par H. Lebègue.

1. Dans *Beiträge zur Gesch. u. Litteratur*, Braunschweig 1773, p. 421 sq.

LE PROBLÈME DES BŒUFS

Ce problème, inventé et rédigé sous forme d'épigramme par Archimède, fut soumis par lui, pour la recherche d'une solution, à ceux qui, à Alexandrie, étudiaient ces questions, dans une lettre adressée à Ératosthène de Cyrène.

Mesure-moi, ami, si tu as la sagesse en partage, avec une application soutenue, le nombre des bœufs d'Hélios qui jadis paissaient dans les plaines de l'île Thrinacienne, la Sicile, répartis en quatre troupeaux de couleurs variées, l'un d'un blanc de lait, le second d'un noir brillant, le troisième blond, et le quatrième bigarré. Dans chaque troupeau, il y avait un nombre considérable de taureaux dans les proportions que voici : imagine, ami, les blancs en nombre égal à la moitié, augmentée du tiers, des taureaux noirs et augmentée de tous les blonds, et le nombre des noirs égal au quart et au cinquième du nombre des bigarrés et au nombre de tous les blonds. Observe, d'autre part, que le nombre des bigarrés restants est égal au sixième, augmenté du septième, du nombre des taureaux blancs et au nombre de tous les blonds. Les proportions des vaches étaient les suivantes : le nombre des blanches était exactement égal à la somme du tiers et du quart de tout le troupeau noir, alors que les

PROBLEMA BOVINUM

Πρόβλημα,

ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὐρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.

- 5 Πληθὺν Ἡελίοιο βοῶν, ὧ ξεῖνε, μέτρησον
φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης τετραχῇ στίφεια δασσαμένη
χροιὴν ἀλάσσοντα · τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
10 κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. Ἐν δὲ ἐκάστω
στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες · ἀργότριχας μὲν
κυανέων ταύρων ἡμίσει ἡδὲ τρίτῳ
15 καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὧ ξεῖνε, νόησον,
αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
Τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἐβδομάτῳ τε
20 καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσὶ τὰδ' ἔπλετο · λευκότριχες μὲν
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκές ἴσαι ·

3 πραγματευομένοις Struve : πραγματουμένοις G || 8 δασσαμένη
G : δασαμένη P || 16 τετράτῳ τε P : τετάρτῳ G || 17 πᾶσιν P :
πᾶσι G || 20 ἰσαζομένους G : ἰδαιομένους P || 23 τετράτῳ P :
τετάρτῳ G.

noires égalaient en nombre la somme du quart et du cinquième du nombre des bigarrées quand elles venaient toutes paître avec les taureaux. Les bigarrées, d'autre part, avaient un nombre égal à la somme de la cinquième et de la sixième partie de tout le troupeau des blondes, et les blondes étaient égales en nombre à la moitié du tiers, augmentée du septième, du troupeau blanc. Ami, si tu peux me dire exactement combien il y avait de bœufs d'Hélios en précisant le nombre des taureaux robustes et, à part, celui des vaches pour chaque couleur, tu ne seras, certes, pas appelé ignorant ni inculte en matière de nombres, mais tu ne te feras pas pour autant ranger parmi les savants. Mais examine encore toutes les manières dont les bœufs d'Hélios ont été groupés. Chaque fois que les taureaux blancs venaient joindre leur multitude aux noirs, ils se rangeaient fermement en un groupe ayant la même mesure en profondeur et en largeur, et les vastes plaines de la Thrinacie étaient remplies de cet amas carré. Les blonds et les bigarrés, réunis, se rangeaient de leur côté de façon à former un groupe qui, commençant par un, allait s'élargissant jusqu'à parfaire une figure triangulaire, sans que les taureaux d'autres couleurs fussent présents ni absents. Quand tu auras trouvé, ami, et embrassé dans ton esprit la solution de toutes ces questions, en indiquant toutes les mesures de ces multitudes, rentre chez toi, te glorifiant de ta victoire, et sache qu'on te juge arrivé à la perfection dans cette science.

SCHOLIE

Archimède ■ ainsi exposé avec certitude, dans ce poème, le problème (sc. des bœufs), à savoir qu'il doit y avoir quatre troupeaux de bœufs ; le premier troupeau

- αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
 μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
 σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομέναις.
 Ξανθοτρίχων δ' ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἡδὲ καὶ ἕκτῳ
 5 ποικίλαι ἰσάριθμον πλήθος ἔχον τετραχῇ.
 Ξανθαὶ δ' ἡριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἴσαι
 ἀργεννῆς ἀγέλης ἐβδομάτῳ τε μέρει.
 Ξεῖνε, σὺ δ' Ἑλίοιο βόες πόσαι ἀτρεκές εἰπών,
 χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφένων ἀριθμόν,
 10 χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιάν ἕκασται,
 οὐκ αἰδρίεις καὶ λέγοι' οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
 οὐ μὲν πῶ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. Ἄλλ' ἴθι φράζευ
 καὶ τάδε πάντα βοῶν Ἑλίοιο πάθη.
 Ἄργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαῖατο πληθὺν
 15 κυανέοις, ἴσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
 εἰς βάθος εἰς εὐρὸς τε, τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντα
 πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
 Ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
 ἴσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
 20 σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
 ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων.
 Ταῦτα συνεξευρών καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας
 καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
 ἔρχεο κυδιῶν νικηφόρος ἴσθι τε πάντως
 25 κεκριμένος ταύτῃ γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Σχόλιον

Τὸ μὲν οὖν πρόβλημα διὰ τοῦ ποιήματος ὁ Ἀρχιμήδης
 ἐδήλωσε σαφῶς · ἰστέον δὲ λεγόμενον, ὅτι τέσσαρας

1 τετράτῳ P : τετάρτῳ G || 4 δ' P : om. G || 5 τετραχῇ G :
 τετραχεῖ P || 6 τρίτου P : τρίτον G || 11 λέγοι' G : λέγοιο P ||
 19 ἀμβολάδην G : ἀμβολάνδην P || 22 πραπίδεσσιν G : πραπί-
 δεσιν P || ἀθροίσας G : ἀθρήσας P || 23 ξεῖνε, τὰ P : ὦ ξένε G.

comprend des taureaux blancs et des vaches blanches, dont le nombre s'élève à quatorze myriades de myriades augmentées de cinq cent quatre-vingt-deux myriades et de sept mille trois cent soixante unités¹; le deuxième troupeau comprend des taureaux noirs et des vaches noires dont le nombre (sc. total) s'élève à neuf myriades de myriades augmentées de huit mille huit cent trente myriades et de huit cents unités²; le troisième troupeau comprend des taureaux bigarrés et des vaches bigarrées dont le nombre s'élève à huit myriades de myriades augmentées de six mille neuf cent quatre-vingt-onze myriades et de quatre cents unités³; le quatrième troupeau comprend les bœufs blonds dont le nombre (sc. total) s'élève à sept myriades de myriades augmentées de six mille sept cent huit myriades et de huit mille unités⁴; il s'ensuit que la somme des effectifs des quatre troupeaux s'élève à quarante myriades de myriades augmentées de trois mille cent douze myriades et de six mille cinq cent soixante unités⁵. Le troupeau des taureaux blancs a un effectif de huit myriades de myriades augmentées de deux mille neuf cent trente et une myriades et de huit mille cinq cent soixante unités⁶, le nombre des vaches blanches est de cinq myriades de myriades augmentées de sept mille six cent cinquante myriades et de huit mille huit cent unités⁷; le troupeau des taureaux noirs a un effectif de cinq myriades de myriades augmentées de neuf mille six cent quatre-vingt-quatre myriades et de mille cent vingt unités⁸, et le nombre des vaches noires est de trois myriades de myriades augmentées de neuf mille cent quarante-cinq myriades et de neuf mille six cent quatre-vingt unités⁹; le troupeau des taureaux bigarrés a un effectif de cinq myriades de myriades augmentées de huit mille huit cent soixante-quatre myriades et de quatre mille huit cent unités¹⁰, et le nombre des vaches bigarrées est de deux myriades de myriades augmentées de huit mille cent vingt-six

- ἀγέλας εἶναι δεῖ βοῶν, λευκοτρίχων μὲν μίαν ταύρων
καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθος ὁμοῦ συνάγει μυριάδας διπλᾶς
ιδ' καὶ ἀπλᾶς φπβ' καὶ μονάδας ,ζτξ', κυανοχρόων
δ' ἄλλην ὁμοῦ ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθος ἐστι
5 μυριάδων διπλῶν ἑννέα καὶ ἀπλῶν ,ηωλ' καὶ μονάδων ω',
μυξοτρίχων δ' ἄλλην ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθος
ἐστι μυριάδων διπλῶν η' καὶ ἀπλῶν ,ς'α' καὶ μονάδων
υ' · τῆς δὲ λοιπῆς ἀγέλης ξανθοχρόων συνάγει τὸ πλῆθος
διπλᾶς μυριάδας ζ' καὶ ἀπλᾶς ,ςψη', μονάδας δὲ ,η ·
10 ὥστε συναγεσθαι ὁμοῦ τὸ πλῆθος τῶν δ' ἀγελῶν μυριάδας
διπλᾶς μ' καὶ ἀπλᾶς ,γριβ' καὶ μονάδας ,ςφξ'. Καὶ
ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἔχει μυριάδας
διπλᾶς η' καὶ ἀπλᾶς ,β'αλα' καὶ μονάδας ,ηφξ', θηλειῶν
δὲ μυριάδας διπλᾶς ε' καὶ ἀπλᾶς ,ζχν' καὶ μονάδας
15 ,ηω', ἡ δὲ ἀγέλη τῶν κυανοχρόων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας
διπλᾶς ε' καὶ ἀπλᾶς ,θχπδ' καὶ μονάδας ,αρκ', θηλειῶν
δὲ μυριάδας διπλᾶς γ' καὶ ἀπλᾶς ,θρμε' καὶ μονάδας
,θχπ', ἡ δ' ἀγέλη τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἔχει μὲν
μυριάδας διπλᾶς ε' καὶ ἀπλᾶς ,ηωξδ' καὶ μονάδας ,δω',
20 θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς β' καὶ ἀπλᾶς ,ηρκς' καὶ
μονάδας ,εχ', ἡ δ' ἀγέλη τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων
ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς γ' καὶ ἀπλᾶς ,γρς' καὶ μονάδας
αξ', θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς δ' καὶ ἀπλᾶς ,γφιγ'

myriades et de cinq mille six cent unités¹ ; le troupeau des taureaux blonds a un effectif de trois myriades de myriades augmentées de trois mille cent quatre-vingt-quinze myriades et de neuf cent soixante unités², et le nombre des vaches blondes est de quatre myriades de myriades augmentées de trois mille cinq cent treize myriades et de sept mille quarante unités³. Le nombre des taureaux blancs est ainsi égal à la somme de la moitié et du tiers du nombre des taureaux noirs, augmentée du nombre total des taureaux blonds⁴, le nombre des taureaux noirs est égal à la somme du quart et du cinquième du nombre des taureaux bigarrés augmentée du nombre total des taureaux blonds⁵, le nombre des taureaux bigarrés est égal à la somme du sixième et du septième du nombre des taureaux blancs augmentée du nombre total des taureaux blonds⁶, le nombre des vaches blanches était égal à la somme du tiers et du quart de tout le troupeau des bœufs noirs⁷, le nombre des vaches noires était égal à la somme du quart et du cinquième de tout le troupeau des bœufs bigarrés⁸, et le nombre des vaches bigarrées est égal à la somme du cinquième et du sixième de la totalité des bœufs blonds⁹. D'autre part, le nombre des vaches blondes était égal à la somme de la sixième et de la septième partie de tout le troupeau des bœufs blancs¹⁰. De plus, la multitude contenue dans les troupeaux des taureaux blancs et des taureaux noirs réunis se mesure par un nombre carré, et la multitude contenue dans les troupeaux réunis des taureaux blonds et des taureaux bigarrés se mesure par un nombre triangulaire, conformément aux règles indiquées pour chaque couleur¹¹.

1. $200\ 000\ 000 + 81\ 260\ 000 + 5\ 600 = 281\ 265\ 600$ vaches bigarrées.

2. $300\ 000\ 000 + 31\ 950\ 000 + 960 = 331\ 950\ 960$ taureaux blonds.

3. $400\ 000\ 000 + 35\ 130\ 000 + 7040 = 435\ 137\ 040$ vaches blondes.

4-11. Cf. notes complémentaires.

- καὶ μονάδας ζμ'. Καὶ ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἡμίσει καὶ τρίτῳ μέρει τοῦ πλῆθους τῶν κυανοχρόων ταύρων καὶ ἔτι ὅλη τῇ τῶν ξανθοχρωμάτων ἀγέλῃ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν κυανοχρωμάτων ἴσον τῷ τετάρτῳ
- 5 καὶ πέμπτῳ μέρει τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων καὶ ὅλῳ τῷ πλήθει τῶν ξανθοχρωμάτων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἴσον τῷ ἕκτῳ καὶ ἐβδόμῳ μέρει τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἔτι τῷ πλήθει ὅλῳ τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων, καὶ πάλιν τὸ πλῆθος τῶν λευκῶν θηλειῶν
- 10 ἴσον τῷ τρίτῳ καὶ τετάρτῳ μέρει ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν κυανοχρόων, τὸ δὲ τῶν κυανοχρόων ἴσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν ποικιλοτρίχων, τὸ δὲ τῶν ποικιλοτρίχων ἴσον τῷ πέμπτῳ καὶ ἕκτῳ μέρει τῆς ὅλης τῶν ξανθῶν βοῶν. Πάλιν δὲ τὸ τῶν ξανθῶν
- 20 θηλειῶν πλῆθος ἦν ἴσον τῷ ἕκτῳ τε καὶ ἐβδόμῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν λευκῶν βοῶν. Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἡ τῶν κυανοχρόων ταύρων συντεθεῖσα ποιεῖ τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ δ' ἀγέλη τῶν ξανθοτρίχων ταύρων μετὰ τῆς ἀγέλης τῶν ποικιλοχρόων
- 25 συντεθεῖσα ποιεῖ τρίγωνον, ὡς ἔχει τὰ τῶν ὑποκειμένων κανόνων καθ' ἕκαστον χρῶμα.

NOTES COMPLÉMENTAIRES

Page 24.

3. Rappelons qu'Archimède désigne le paramètre d'une parabole par l'expression « le segment de droite qui va jusqu'à l'axe ». Il s'agit du segment compris, sur une génératrice du cône qui définit la parabole, entre le sommet de la parabole et le sommet du cône. En expression algébrique, le paramètre est p dans l'équation $y^2 = 2 p x$, en coordonnées cartésiennes.

Page 25.

1. Dans cette seconde partie du traité *Des corps flottants*, Archimède suppose plane la surface du liquide, alors que, dans la première partie, il tient partout compte de la proposition I, 2.

2. Cf. *Quadr. parab.*, 1.

Page 26.

3. Hypothèse complémentaire de celle qui est énoncée à la fin de la prop. I, 7.

4. Bien que dans les énoncés des propositions II, 2 et 3 le rapport des densités soit présenté comme n'ayant aucune importance sur les conclusions, Archimède suppose, dans les démonstrations de ces deux théorèmes, que la densité du solide est inférieure à celle du liquide.

Page 35.

2. On a en effet : $FO = 2FN$, d'où $\frac{FN}{NO} = \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$; d'autre part, $\frac{F\Omega}{NO} = \frac{4}{15}$; en ajoutant les deux dernières égalités : $\frac{FN+F\Omega}{NO} = \frac{9}{15}$; $\frac{N\Omega}{NO} = \frac{9}{15}$, d'où (cf. Eucl. V, 7, coroll.) $\frac{O\Omega}{N\Omega} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Page 41.

6. Puisque $\Pi M = \Phi + X = \frac{3}{2} \Phi < \frac{3}{2} \Pi H$, et $HM = \Pi M - \Pi H < \frac{3}{2} \Pi H - \Pi H$.

7. Puisque $\Theta O = \Theta \Omega + \Omega O = PK + BP = BK = 2 K \Delta$, et $B \Delta = N O$.

Page 49.

1. Cf. Eucl. V, 10.

2. C'est-à-dire de manière que $\frac{B \Delta}{E Z} = \frac{A \Delta}{A Z}$ et $\frac{E Z}{H \Theta} = \frac{A I}{A \Delta}$.

Page 50.

1. La tangente Aw à la parabole ABL (sc. $A\Pi O\Lambda$) au point A coupe les prolongements de NO , ZE et HT en c , v et m ; on a donc $\frac{BD}{E Z} = \frac{AD}{A Z} = \frac{Dw}{Z v}$; mais $Dw = 2BD$, d'après *Quadr. parab.*, 2; donc $Zv = 2EZ$, et Aw est tangent aussi à la parabole AEI ; pour les mêmes raisons, Aw est aussi tangent à la parabole ATD , d'où, d'après *Quadr. parab.*, 5, $\frac{LN}{AN} = \frac{NO}{Oc}$, et, d'après Eucl. V, 18, $\frac{AL}{AN} = \frac{Nc}{Oc}$, et, par conséquent, $Oc = \frac{AN \cdot Nc}{AL}$; pour les mêmes raisons, $Gc = \frac{AN \cdot Nc}{AI}$; $Xc = \frac{AN \cdot Nc}{AD}$; $OG = Gc - Oc = \frac{AN \cdot Nc \cdot (AL - IA)}{IA \cdot AL}$; $GX = Xc - Gc = \frac{AN \cdot Nc \cdot (IA - AD)}{AD \cdot IA}$ et, par conséquent $\frac{OG}{GX} = \frac{AD \cdot (AL - IA)}{AL \cdot (IA - AD)} = \frac{AD \cdot LI}{AL \cdot ID}$.

Page 57.

6. Cf. prop. II, 4.

7. Sc. la figure qui suit.

8. Sc. le développement qui suit.

Page 75.

7. Ce pentagone est, en effet, égal, d'après les évaluations qui précèdent, à : $\frac{1}{2}$ carré $AG - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} \right)$ carré $AG = \left(\frac{1}{2} - \frac{17}{48} \right) AG = \frac{7}{48} AG = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) \right] AG$.

Page 85.

3. Cf. *ibid.* I, 4.
4. Cf. *ibid.* I, 14.
5. Cf. *ibid.* I, 10.

Page 86.

1. Cette dernière remarque est condamnée par Heiberg comme une addition provenant probablement d'une note marginale.
2. Cf. *Sur les con. et les sphér.*, prop. 1.

Page 87.

2. Sc. les traités, perdus, d'Euclide et d'Aristée ; cf. *Quadr. parab.*, 2.
3. Cf. Eucl. V, 9 et VI, 4.
4. Autre interpolation.
5. Cf. le lemme 4.
6. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 6 et 7.
7. Cf. le lemme 3.

Page 88.

2. De la proportion $\frac{\Delta\Gamma}{\Lambda\Gamma} = \frac{\Delta B}{\Lambda K}$ on déduit en effet $\Delta B = \frac{1}{2} \Lambda K = \frac{1}{4} \Lambda Z$; cf. Eucl. VI, 4.
3. Dans *Quadr. parab.*, prop. 14-17 ; mais la démonstration géométrique promise ici pour le traité de la méthode n'a pas été retrouvée.

Page 90.

1. Cf. Eucl. VI, 4.
2. Cf. Eucl. VI, 8, coroll.
3. Cf. Eucl. I, 47.
4. Cf. Eucl. V, 15.
5. Comme le fait remarquer Heiberg, *op. laud.* II, p. 443, il y a quelque confusion dans le texte ; on s'attendrait, pour l'expression de la ἐπομένη de la proportion, à πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους, au lieu du datif ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις.

Page 94.

1. *Sur les con. et les sphér.*, 11.
2. Cf. Eucl. VI, 4.
3. Cf. Eucl. V, 18 ; VI, 4.

4. Ce passage est une interpolation, comme le montrent les expressions $\eta \pi\lambda\alpha\gamma\acute{\iota}\alpha$ et $\eta \delta\rho\theta\acute{\iota}\alpha$ qui n'apparaissent dans la terminologie des coniques qu'avec Apollonius.

5. Cf. Eucl. V, 15 ; VI, 4.

6. Cf. Eucl. V, 9.

7. Cf. Eucl. XII, 2.

Page 104.

2. Le ms. C présentant ici une lacune presque complète, dans la fin de la prop. 6, le raisonnement a été reconstitué pour la première fois par Heiberg, d'après la figure et d'après le milieu de la prop. 9.

3. Cf. lemme 10.

Page 105.

1. Cf. Eucl. V, 17.

2. Cf. prop. 2.

3. Cf. Eucl. V, 22.

Page 106.

1. Cf. *De le sph. et du cyl.* II, 2.

2. Le raisonnement manquant dans le ms. C a été reconstitué par Heiberg, d'après la figure et d'après le début de la prop. 2.

Page 112.

3. Cf. Eucl. V, 18.

4. Puisque $\frac{3}{2} H\Gamma + \frac{1}{2} HA = H\Gamma + \frac{1}{2} (H\Gamma + HA) = H\Gamma + \frac{1}{2} A\Gamma = H\Gamma + \Gamma E$; et $H\Gamma + \frac{1}{4} HA = \Gamma H + H\Phi$.

5. Cf. Eucl. V, 15.

6. Cf. Eucl. V, 16.

7. Cf. Eucl. V, 17.

Page 119.

1. La suite de la prop. 13 manque dans le texte grec. Elle a été reconstituée, dans le style d'Archimède, par Heiberg :

Les centres de gravité des parallélogrammes posés sur ΣK et ZT sont les milieux de ΣK et ZT ; le centre de gr. de leur somme est donc le point de rencontre A' de la droite de jonction des centres de gr. des parallélogrammes avec $\Theta\Pi$ (cf. lemme 3). De même, le centre de gr. de la somme des parallélogrammes posés sur $X\Lambda$ et $Y\Phi$ est le point de rencontre B' de la droite joignant les milieux de $X\Lambda$ et de $Y\Theta$ avec ΘE . Dès lors, on a

les relations (cf. Eucl. III, 31 ; V, 15 ; VI, 1, 4, 8, 17)

$$\begin{aligned} \frac{\text{parallélogr. sur } \Sigma K + \text{parallélogr. sur } ZT}{\text{p. sur } X\Lambda + \text{p. sur } Y\Phi} &= \frac{\Sigma K}{\Lambda X} = \frac{\Sigma K}{\Sigma P} = \\ \frac{\overline{\Sigma K}^1}{\Sigma P \cdot \Sigma K} &= \frac{\Sigma P \cdot \Sigma O}{\Sigma P \cdot \Sigma K} = \frac{\Sigma O}{\Sigma K} = \frac{\Sigma P + 2 \Sigma \Theta}{\Sigma K} = \frac{\Lambda X + 2 X \Sigma}{\Sigma K} = \\ \frac{\frac{1}{2} \Lambda X + X \Sigma}{\frac{1}{2} \Sigma K} &= \frac{B' \Theta}{A' \Theta} ; \text{ les parallélogrammes indiqués se font donc} \end{aligned}$$

équilibre autour de Θ , et le même raisonnement s'applique à tous les parallélogrammes déterminés de la même manière, d'où il suit que le demi-cylindre et le prisme $H\Theta M$, remplis de ces parallélogrammes, se font, eux aussi, équilibre autour de Θ . Mais le demi-cylindre fait équilibre autour de Θ au segment de cylindre posé sur Ξ (cf. prop. 12), et $\Theta \Xi$ est égal à $\Pi \Theta$; il s'ensuit que le segment posé sur Π fait équilibre au prisme $H\Theta M$. De plus, le centre de gr. du prisme est le point qui divise $\Xi \Theta$ de manière que la partie située du côté de Θ est double de la partie restante (cf. lemme 5) ; le rapport du segment de cylindre au prisme $H\Theta M$ est donc égal au rapport des deux tiers de $\Xi \Theta$ à $\Pi \Theta$, c'est-à-dire égal au rapport de deux à trois. Comme le prisme $H\Theta M$ est le quart du prisme entier, le segment de cylindre en est la sixième partie.

Page 123.

1. Le texte grec présente ici une lacune de quelques mots qu'on peut reconstituer d'après le passage correspondant de la prop. 14.

2. Une grande lacune, parsemée de mots et de groupes de mots isolés, dans le texte grec. Le raisonnement a été reconstitué par Heiberg d'après les deux figures et les propositions 19 et 25 du traité *Sur les con. et les sphér.*

3. Cf. Eucl. X, 1.

Page 172.

1. 1 400 000 000 + 5 820 000 + 7 360 = 1 405 827 360 bœufs blancs.

2. 900 000 000 + 88 300 000 + 800 = 988 300 800 bœufs noirs.

3. 800 000 000 + 69 910 000 + 400 = 869 910 400 bœufs bigarés.

4. 700 000 000 + 67 080 000 + 8 000 = 767 088 000 bœufs blonds.

5. 4 000 000 000 + 31 120 000 + 6 560 = 4 031 126 560 bœufs dans l'ensemble.

6. $800\ 000\ 000 + 29\ 310\ 000 + 8\ 560 = 829\ 318\ 560$ taureaux blancs.

7. $500\ 000\ 000 + 76\ 500\ 000 + 8\ 800 = 576\ 508\ 800$ vaches blanches.

8. $500\ 000\ 000 + 96\ 840\ 000 + 1\ 120 = 596\ 841\ 120$ taureaux noirs.

9. $300\ 000\ 000 + 91\ 450\ 000 + 9\ 680 = 391\ 459\ 680$ vaches noires.

10. $500\ 000\ 000 + 88\ 640\ 000 + 4\ 800 = 588\ 644\ 800$ taureaux bigarrés.

Page 173.

4. On a en effet : $829\ 318\ 560 = \frac{5}{6} \cdot 596\ 841\ 120 + 331\ 950\ 960 = 497\ 367\ 600 + 331\ 950\ 960$; cf. v. 9 de l'épigramme.

5. $596\ 841\ 120 = \frac{9}{20} \cdot 588\ 644\ 800 + 331\ 950\ 960 = 264\ 890\ 160 + 331\ 950\ 960$; cf. v. 12 de l'épigr.

6. $588\ 644\ 800 = \frac{13}{42} \cdot 829\ 318\ 560 + 331\ 950\ 960 = 256\ 693\ 840 + 331\ 950\ 960$; cf. v. 14 de l'épigr.

7. $576\ 508\ 800 = \frac{7}{12} \cdot 988\ 300\ 800 = \frac{6\ 918\ 105\ 600}{12}$; cf. v. 17 de l'épigr.

8. Cf. v. 20 de l'épigr.

9. Cf. v. 22 de l'épigr.

10. Cf. v. 23 de l'épigr.

11. Cf. v. 32 sq. de l'épigr.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS.....	VII
SIGLA.....	IX
Des Corps flottants.....	1
Stomachion.....	67
La Méthode.....	77
Le Livre des Lemmes.....	129
Le Problème des Bœufs.....	165
NOTES COMPLÉMENTAIRES.....	175